НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
КРИОСФЕРА ЗЕМЛИ

Криосфера Земли, т. IX, № 4, с. 34–41

ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА МЕРЗЛЫХ ГРУНТОВ

УДК 551.328/345

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ЛЬДА С ПОРИСТЫМИ ЧАСТИЦАМИ

В. С. Колунин

Институт криосферы Земли СО РАН, 625000, Тюмень, а/я 1230, Россия

Теоретически исследован стационарный процесс теплопередачи через лед с пористыми частицами, насыщенными водным раствором. В градиентном поле температуры частицы перемещаются во льду вследствие режеляции. Сформулирована и решена сопряженная задача теплопроводности, фильтрации и диффузии для отдельной ячейки среды. Методом анизотропной проводимости получена аналитическая зависимость коэффициента теплопроводности среды от параметров ячейки. Показано, что при определенных условиях теплопроводность льда с частицами может превысить теплопроводность отдельных фаз в несколько раз.

Лед, пористая частица, водный раствор, тепломассоперенос

HEAT TRANSFER IN ICE WITH POROUS PARTICLES

V. S. Kolunin

Earth Cryosphere Institute SB RAS, 625000, Tyumen, P/O box 1230, Russia

Heat transfer in ice with porous particles saturated with aqueous solution is studied theoretically. The imposed thermal gradient makes the particle move in ice due to regelation. Every particle is a heat dipole. The thermal, filtration and diffusion problems are stated and solved for an elementary cell of the medium. An analytical solution for the effective thermal coefficient is found using the anisotropic conductivity method. The thermal conductivity of ice with particles may be several times higher than the thermal conductivity of every phase of the system.

Ice, porous particle, aqueous solution, heat and mass transfer

ВВЕДЕНИЕ

В статье [*Колунин, 2004*], посвященной тепломассопереносу в пористой среде, свободное пространство которой заполнено льдом и водой, было показано, что присутствие льда способно существенно изменять тепломассообменные характеристики среды и, в частности, ее теплопроводящие свойства. В природных условиях вода, заполняющая пористое пространство, содержит, как правило, растворимые соединения. В какой мере они могут изменить тепломассообменные характеристики гетерогенной среды, имеющей в своем составе лед? В настоящей работе изучается стационарный процесс теплопереноса через лед, который содержит пористые частицы, насыщенные водным раствором. Система находится в термодинамических условиях, исключающих возможность замерзания раствора в порах частицы.

В градиентном поле температуры частица (даже сплошная) может перемещаться относительно льда вследствие режеляции [*Römkens, Miller, 1973*] – лед плавится на фронтовой части частицы, образовавшаяся вода оттекает к тыльной части, где замерзает, восстанавливая форму полости льда. Фазовый переход сопровождается поглощением тепла с одной стороны частицы и выделением на противоположной стороне. Таким образом, особенностью рассматриваемой среды является наличие парного фазового перехода лед–вода на поверхности включения, а частицу во льду можно назвать тепловым диполем.

При теоретическом исследовании свойств гетерогенных сред распространены материалы с периодической структурой [*Нигматулин, 1987; Бардзокас, Зобнин, 2003*]. Это, с одной стороны, значительно упрощает математическую постановку задачи и сводит изучение процессов тепломассопереноса в среде в целом к исследованию процессов в элементарной ячейке, а с другой стороны, результаты изучения модельной пористой среды позволяют делать разумные предположения о тепломассообменных свойствах тел с нерегулярной структурой.

© В.С. Колунин, 2005

Для упрощения сделаем следующие предположения. Рассматриваются частицы сферической формы, одинакового размера, водопроницаемые, и расположенные в пространстве периодически (рис. 1). Газовая фаза отсутствует. Жидкость несжимаемая. Твердая фаза (лед) и каркас частицы являются абсолютно жесткими телами. На контакте минерального каркаса с раствором не происходит химических и ионно-обменных реакций.

Элементами рассматриваемой гетерогенной среды являются лед и мелкопористая частица, которые по отдельности обладают изотропными свойствами. Задача о стационарном теплопереносе через среду в целом сводится к задаче определения потока тепла через элементарную ячейку (рис. 2), на основаниях которой заданы постоянные температуры, а обмен теплом через боковые грани отсутствует [*Колунин, 2004*]. На рисунке изображены два элемента ячейки: мелкопористая частица (E_1), насыщенная раствором, и лед (E_2). В дальнейшем будем считать все коэффициенты проводимости элементов системы константами. Систему координат привяжем к минеральному каркасу элемента E_1. Ячейка имеет высоту b и площадь основания S_a. Количество тепла, выделившегося при фазовом переходе вода–лед, обозначено через Q_{lat}.

1. Уравнения тепломассопереноса

Перенос тепла в элементах ячейки E_1 и E_2 подчиняется закону Фурье, который устанавливает линейную связь между плотностью потока тепла $\mathbf{j}_q$ и градиентом температуры ∇T:

$$\mathbf{j}_q = -\lambda_i \nabla T, \qquad (1)$$

где λ_i – коэффициент теплопроводности элементов ячейки. Индексы $i = 1, 2$ соответствуют материалам E_1 и E_2.

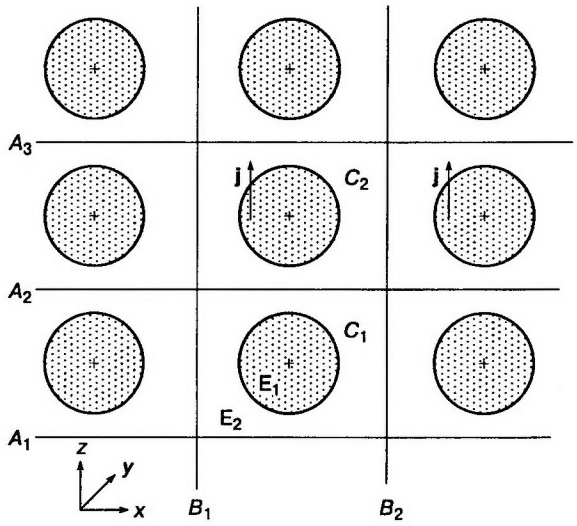

Рис. 1. Фрагмент льда с частицами.

E_1 –пористая частица, насыщенная водным раствором; E_2 – лед; $\mathbf{j}$ – плотность потока тепла.

В пренебрежении конвективным переносом тепла закон сохранения энергии в совокупности с законом Фурье дают уравнение Лапласа для определения температуры в элементах ячейки

$$\Delta T = 0 \qquad (2)$$

при следующих граничных условиях:

на гранях ячейки

$$T\big|_{z=-b/2} = T_1, \quad T\big|_{z=b/2} = T_2, \quad \frac{\partial T}{\partial n_b} = 0, \qquad (3)$$

где $\partial/\partial n_b$ – производная по внешней нормали к боковой грани ячейки;

на поверхности включения

$$T\big|_{r=R-0} = T\big|_{r=R+0} \text{ (непрерывность температуры)}; \qquad (4)$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{r=R-0} - \left(-\lambda_2 \frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{r=R+0}\right) = -\frac{\kappa v_i \cos\theta}{V_i} \text{ (условие Стефана)}, \qquad (5)$$

где v_i – скорость льда; λ_1, λ_2– коэффициенты теплопроводности частицы и льда; κ – молярная теплота фазового перехода; V_i – молярный объем льда; (r, θ) – радиус и угол в сферической системе координат (см. рис. 2).

Тепловая задача может быть решена, если известна скорость движения льда, для нахождения которой, как показано ниже, необходимо знать давление жидкости и концентрацию раствора на границе включения. Это в свою очередь требует решения задач фильтрации и диффузии в частице.

Движение жидкости (водного раствора) в пористой среде E_1 подчиняется закону Дарси, согласно которому среднеобъемная плотность потока $\mathbf{j}_V$ пропорциональна градиенту давления жидкости ∇p:

$$\mathbf{j}_V = -K_h \nabla p, \qquad (6)$$

где K_h – коэффициент гидропроводности частицы.

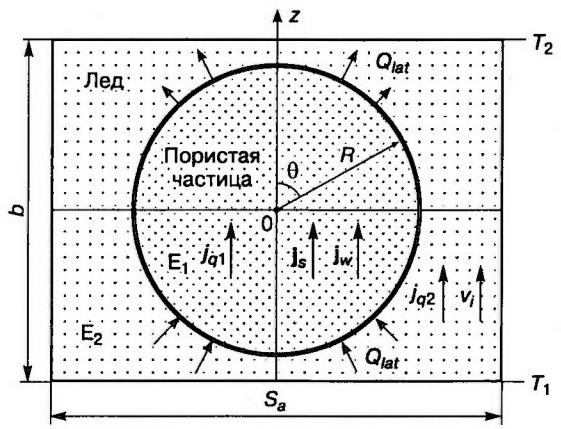

Рис. 2. Общая схема потоков в ячейке (поясн. в тексте).

В принятых предположениях об однородности среды E_1 условие неразрывности массы и закон Дарси дают уравнение Лапласа для определения давления p в частице:

$$\Delta p = 0. \quad (7)$$

Сформулируем граничное условие для задачи фильтрации. Объемный поток раствора $\mathbf{j}_V$ выражается через молярные потоки компонентов равенством [*Хаазе, 1967*]

$$\mathbf{j}_V = V_w \mathbf{j}_w + V_s \mathbf{j}_s, \quad (8)$$

где $\mathbf{j}_w$ и $\mathbf{j}_s$ – молярные плотности потоков воды и растворенных веществ, моль/(м^2·с); V_w, V_s – парциальные молярные объемы воды и растворенного вещества в растворе. Равенство (8) и два условия на поверхности включения: непроницаемости льда для растворенного вещества

$$j_{sr}(R, \theta) = 0 \quad (9)$$

и неразрывности для воды

$$j_{wr}(R, \theta) = v_i \cos\theta / V_i, \quad (10)$$

где индексом r помечена радиальная компонента вектора, позволяют связать радиальную составляющую объемной плотности потока $j_{Vr}(R, \theta)$ со скоростью движения льда v_i: $j_{Vr}(R, \theta) = V_w v_i \cos\theta / V_i$. Последнее равенство с учетом закона Дарси приводит к следующему граничному условию *на поверхности частицы*:

$$-K_h \left.\frac{\partial p}{\partial r}\right|_{r=R-0} = \frac{V_w}{V_i} v_i \cos\theta. \quad (11)$$

Движение растворенного в воде вещества происходит в соответствии с двумя механизмами – конвективным переносом при течении раствора как целого и диффузией – и подчиняется закону Фика:

$$\mathbf{j}_s = c_s \mathbf{j}_V - D_n \nabla c_s, \quad (12)$$

где c_s – молярная концентрация раствора; D_n – коэффициент диффузии.

Из закона Фика (12) и условия неразрывности массы следует уравнение Фика для нахождения концентрации раствора в элементе ячейки E_1

$$\Delta c_s - \nabla \cdot (c_s \mathbf{j}_V / D_n) = 0. \quad (13)$$

Условие отторжения примеси льдом (9), закон Фика (12), а также равенство (8) и условие неразрывности для воды (10) приводят к следующему соотношению *на границе включения*:

$$\left(\frac{\partial c_s}{\partial r} - \frac{V_w v_i \cos\theta}{V_i D_n} c_s \right)\Bigg|_{r=R-0} = 0. \quad (14)$$

Система уравнений (2)–(5), (7), (11), (13), (14) позволяет определить распределения температуры, давления и концентрации в пространстве только в том случае, если задана скорость движения льда v_i, для нахождения которой необходимо привлечь дополнительные соображения.

В стационарном процессе включение перемещается относительно льда без ускорения, следовательно, для него выполняется условие механического равновесия. К частице приложены два рода сил: объемные и поверхностные. Объемные силы связаны с наличием внешних силовых полей (например, гравитационного), которые действуют на частицу с некоторой силой $\mathbf{F}_{ex}$. Данная сила уравновешивается силами, приложенными к поверхности частицы (поверхностными силами).

При температурах вблизи точки фазового перехода лед и инородное твердое тело разделяет тонкая жидкая прослойка [*Дерягин и др., 1985*], которая снимает непосредственный контакт между твердыми фазами.

Будем считать поверхность сферического включения молекулярно-гладкой. При относительном перемещении льда и инородного твердого тела вода течет в зазоре между твердыми фазами. Таким образом, на поверхность частицы действуют два рода сил: нормальные и касательные. Нормальные силы связаны с особыми свойствами жидкой пленки и характеризуются величиной расклинивающего давления [*Дерягин и др., 1985*]. Касательные силы вызываются силами вязкого трения жидкости, текущей в пленке между поверхностями льда и минерала. Когда размер частицы превосходит толщину пленки, действием касательных сил по сравнению с действием нормальных можно пренебречь [*Горелик, Колунин, 2002*].

Если минеральная поверхность является шероховатой, то лед частично воспроизводит профиль поверхности минерала. При скольжении льда вдоль шероховатой поверхности происходит режеляция выступов льда в углублениях твердого тела и появляется дополнительная сила тангенциального трения [*Бровка, 1991*]. Согласно результатам этой работы, если величина выступов мала по сравнению с размером включения, то эти силы также не оказывают заметного влияния на скорость движения частицы относительно льда.

В пренебрежении тангенциальными силами условие механического равновесия частицы (включения) записывается в виде

$$\mathbf{F}_{ex} - \int_{S_R} P_{iR} \mathbf{n} dS = 0, \quad (15)$$

где $\mathbf{F}_{ex}$ – внешняя сила; $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к элементу поверхности dS; P_{iR} – нормальное к поверхности раздела фаз давление на лед.

Лед находится в локальном термодинамическом равновесии с водой, находящейся в растворе, которым заполнено свободное пространство мелкопористой части среды. Запишем условие локального термодинамического равновесия льда с водой на поверхности включения – равенство химических потенциалов воды в твердой и жидкой фазах:

$$\mu_i(T_R, P_{iR}) = \mu_w(T_R, p_R, c_{sR}), \qquad (16)$$

где μ_i, μ_w – химические потенциалы чистого льда и воды в растворе; индексом R помечена поверхность контакта льда с раствором. Величины P_{iR}, p_R, T_R, c_{sR} являются функциями положения точки на поверхности.

Разложение химических потенциалов в ряд в окрестности точки фазового равновесия объемных фаз льда и чистой воды приводит к следующему уравнению фазового равновесия:

$$V_i(P_{iR} - p_0) - V_w(p_R - p_0) = -\frac{\kappa(T_R - T_0)}{T_0} - \gamma_w c_{sR}, \qquad (17)$$

где $T_0 = 273{,}15$ K; $p_0 = 0{,}1$ МПа; $\gamma_w = -\partial\mu_w/\partial c_s$ (для идеального раствора $\gamma_w = R_g T V_w$, R_g – универсальная газовая постоянная). Уравнение (17) отличается от обобщенного уравнения Клапейрона–Клаузиуса тем, что вместо давления во льду в нем используется нормальная к поверхности раздела фаз компонента давления на лед [*Гречищев и др., 1980*].

Совокупность равенств (3)–(5), (11), (14), (15), (17) будет граничным условием для задачи теплопереноса в ячейке, которая представляет собой систему уравнений: для температуры (2) в элементах ячейки E_1 и E_2 (см. рис. 2), а также для давления жидкости (7) и концентрации раствора (13) в элементе E_1. Проведем решение системы уравнений последовательно.

2. Теплопередача

Задача состоит в определении теплового потока через основания ячейки при заданном на них перепаде температуры и отсутствии обмена теплом с окружающей средой через боковые грани. При решении задачи должно приниматься во внимание наличие источников тепла на границе включения льда. В силу симметрии пространственной конфигурации и особенности выбора граничных условий скорость льда направлена вдоль оси z. Общая схема расположения элементов и картина потоков приведены на рис. 2.

В настоящей работе для решения тепловой задачи будет использоваться метод анизотропной проводимости [*Колунин, 2004*], который позволяет найти решение аналитически. В основе метода лежит замена изотропных элементов среды анизотропными: в направлении потоков оставляются реальные проводимости (коэффициенты теплопроводности), присущие данным веществам, а в перпендикулярном направлении они принимаются равными нулю или бесконечности. Таким образом, тепловая задача будет решаться для двух ячеек, коэффициенты переноса которых дают крайние значения диапазона, внутри которого находятся истинные величины коэффициентов переноса.

Ход решения данной задачи практически идентичен решению аналогичной задачи для системы пористая среда–вода–лед [*Колунин, 2004*]. Поэтому без вывода приведем конечные формулы для потоков тепла через основания ячейки и распределения температуры на поверхности включения.

2.1. *Бесконечная горизонтальная проводимость*

Запишем выражения:

$$J_q = \lambda_2 \left\{ \frac{\kappa v_i}{V_i \Delta\lambda_{21}} - \left[\nabla_b T + \frac{\kappa v_i}{V_i \Delta\lambda_{21}} \right] \frac{f_1}{\beta + f_1(1-\beta)} \right\}; \qquad (18)$$

$$T_R(\theta) = \begin{cases} -\dfrac{\kappa v_i}{V_i \Delta\lambda_{21}} R\cos\theta + \left(\nabla_b T + \dfrac{\kappa v_i}{V_i \Delta\lambda_{21}} \right) \times \\ \times \dfrac{R}{\beta + f_1(1-\beta)} \dfrac{\ln\left|\dfrac{1+\varepsilon_t\cos\theta}{1-\varepsilon_t\cos\theta}\right|}{\ln\left|\dfrac{1+\varepsilon_t}{1-\varepsilon_t}\right|} + T_m, \ \Delta\lambda_{21} < 0, \\ -\dfrac{\kappa v_i}{V_i \Delta\lambda_{21}} R\cos\theta + \left(\nabla_b T + \dfrac{\kappa v_i}{V_i \Delta\lambda_{21}} \right) \times \\ \times \dfrac{R}{\beta + f_1(1-\beta)} \dfrac{\operatorname{arctg}(\varepsilon_t\cos\theta)}{\operatorname{arctg}\varepsilon_t} + T_m, \ \Delta\lambda_{21} > 0, \end{cases} \qquad (19)$$

где J_q – плотность потока тепла через основания ячейки; $\Delta\lambda_{21} = \lambda_2 - \lambda_1$; $\nabla_b T = (T_2 - T_1)/b$; $T_m = (T_1 + T_2)/2$; β, ε_t, f_1 – безразмерные параметры ячейки:

$$f_1 = \begin{cases} \dfrac{2\varepsilon_t}{\left(1-\varepsilon_t^2\right)\ln\left|\dfrac{1+\varepsilon_t}{1-\varepsilon_t}\right|} & \text{при } \Delta\lambda_{21} < 0, \\ \dfrac{\varepsilon_t}{\left(1+\varepsilon_t^2\right)\operatorname{arctg}\varepsilon_t} & \text{при } \Delta\lambda_{21} > 0, \end{cases}$$

$$\varepsilon_t = \frac{R}{e_t}, \quad e_t^2 = \frac{\lambda_2 S_a - \Delta\lambda_{21}\pi R^2}{\pi|\Delta\lambda_{21}|}, \quad \beta = \frac{2R}{b}.$$

2.2. *Нулевая горизонтальная проводимость*

Функции имеют вид

$$J_q = -\lambda_2 I_3 \nabla_b T + \frac{\lambda_2 \kappa\alpha\beta}{\lambda_1 V_i} v_i I_1; \qquad (20)$$

$$T_R(\theta) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{R\cos\theta}{1 + \varepsilon_0|\cos\theta|} \times \\ \times \left(\nabla_b T + \frac{\kappa}{V_i} \frac{(1-\beta|\cos\theta|)}{\lambda_2} v_i \right) + T_m, \qquad (21)$$

где α, ε_0, I_1, I_3 – безразмерные параметры ячейки:

$$\alpha = \frac{\pi R^2}{S_a}, \quad \varepsilon_0 = \beta\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1\right),$$

$$I_1 = \frac{1}{\varepsilon_0} - \frac{2}{\varepsilon_0^2} + \frac{2}{\varepsilon_0^3}\ln(1+\varepsilon_0),$$

$$I_3 = (1-\alpha) + \frac{2\alpha}{\varepsilon_0^2}\left[\varepsilon_0 - \ln(1+\varepsilon_0)\right].$$

3. Фильтрация

Будем пренебрегать движением жидкости на внешней поверхности частицы (в пленке, разделяющей лед и частицу) и влиянием гравитационного поля на распределение давления в частице. Уравнение Лапласа для давления жидкости (7) с граничным условием (11) имеет точное аналитическое решение

$$p(\mathbf{r}) = p_m - \frac{V_w}{V_i}\frac{v_i}{K_h}z, \qquad (22)$$

где p_m – давление жидкости в сечении $z = 0$. Таким образом, распределение давления в частице обладает осевой симметрией, а линии тока параллельны оси z.

Функция (22) позволяет найти давление жидкости p_R на поверхности частицы ($z = R\cos\theta$)

$$p_R = p_m - \frac{V_w}{V_i}\frac{v_i}{K_h}R\cos\theta, \qquad (23)$$

которое потребуется далее для определения скорости частицы v_i.

4. Диффузия

При полном отторжении примесей льдом количество растворенных веществ внутри частицы будет фиксированным:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 c_{s0} = \int_{V_R} c_s(\mathbf{r})dV, \qquad (24)$$

где c_{s0} – средняя концентрация раствора в частице.

Уравнение Фика (13) с условиями (14) и (24) полностью определяет задачу диффузии, которая имеет аналитическое решение. Распределение концентрации порового раствора в частице имеет вид

$$c_s(\mathbf{r}) = Be^{Az}, \qquad (25)$$

где $A = \frac{V_w}{V_i}\frac{v_i}{D_n}$; $B = \frac{(AR)^3 c_{s0}}{3[AR\,\mathrm{ch}(AR) - \mathrm{sh}(AR)]}$.

Далее при определении скорости частицы необходимо будет знать распределение концентрации на ее поверхности c_{sR}, которое получается из общего решения (25) при $z = R\cos\theta$:

$$c_{sR}(\theta) = Be^{AR\cos\theta}. \qquad (26)$$

5. Скорость движения льда

Для того чтобы найти скорость льда, необходимо воспользоваться двумя физическими условиями: механическим равновесием частицы (15) и локальным термодинамическим равновесием, которое в рассматриваемой системе означает фазовое равновесие льда и воды (17).

Будем полагать, что внешние силовые поля пренебрежимо малы, т. е. $\mathbf{F}_{ex} = 0$. Поскольку функции T_R, p_R, c_{sR} осесимметричны (см. (19), (21), (23), (26)), соотношение (15) с учетом (17) преобразуется к виду

$$\frac{V_w}{V_i}\Theta_0(p_R) - \frac{\kappa}{T_0 V_i}\Theta_0(T_R) - \frac{\gamma_w}{V_i}\Theta_0(c_{sR}) = 0, \qquad (27)$$

где через Θ_0 обозначен линейный функционал:

$$\Theta_0(f) = \int_0^{\pi} f(\theta)\cos\theta\sin\theta d\theta.$$

Определим скорость движения льда для двух ячеек с бесконечной и нулевой горизонтальными теплопроводностями.

5.1. *Бесконечная горизонтальная проводимость*

Явный вид функций $T_R(\theta)$, $p_R(\theta)$, $c_{sR}(\theta)$ дается выражениями (19), (23), (26), подстановка которых в (27) позволяет выразить скорость движения льда относительно частицы через градиент температуры:

$$v_i = -\frac{\kappa}{T_0 V_i}\frac{f_t}{\mathrm{den}_1}\nabla_b T, \qquad (28)$$

где $f_t = \begin{cases} \dfrac{1-f_1}{\beta+(1-\beta)f_1}\dfrac{\varepsilon_t^2-1}{\varepsilon_t^2} & \text{при } \Delta\lambda_{21} < 0, \\ \dfrac{1-f_1}{\beta+(1-\beta)f_1}\dfrac{\varepsilon_t^2+1}{\varepsilon_t^2} & \text{при } \Delta\lambda_{21} > 0, \end{cases}$

$$\mathrm{den}_1 = \frac{2}{3}\left(\frac{V_w}{V_i}\right)^2\frac{1}{K_h} + \left(\frac{\kappa}{V_i}\right)^2\frac{f_t - 2/3}{T_0\Delta\lambda_{21}} + \frac{2}{3}\frac{\gamma_w V_w c_{s0}}{V_i^2 D_n}.$$

5.2. *Нулевая горизонтальная проводимость*

Распределение температуры T_R на поверхности включения задается функцией (21). Подстановка (21) и (23), (26) в равенство (27) дает выражение для скорости движения льда

$$v_i = -\frac{\lambda_2\kappa}{\lambda_1 V_i T_0}\frac{I_1}{\mathrm{den}_0}\nabla_b T, \qquad (29)$$

где

$$\mathrm{den}_0 = \frac{2}{3}\left(\frac{V_w}{V_i}\right)^2\frac{1}{K_h} + \left(\frac{\kappa}{V_i}\right)^2\frac{I_1 - \beta I_2}{T_0\lambda_1} + \frac{2}{3}\frac{\gamma_w V_w c_{s0}}{V_i^2 D_n},$$

$$I_2 = \frac{2}{3\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon_0^2} + \frac{2}{\varepsilon_0^3} - \frac{2}{\varepsilon_0^4}\ln(1+\varepsilon_0).$$

6. Эффективная теплопроводность ячейки

Коэффициент теплопроводности гетерогенной среды имеет тензорную природу [*Бардзокас, Зобнин, 2003*]. Однако для характеристики теплопроводящих свойств среды в некотором фиксированном направлении часто используется понятие эффективного коэффициента теплопроводности $\tilde{\lambda}$, который по определению равен коэффициенту пропорциональности между величиной теплового потока и приложенным градиентом температуры в выбранном направлении.

Настоящая работа не преследует цель дать полную информацию о теплопроводящих характеристиках рассматриваемой среды, а имеет намерение лишь показать роль тепловых диполей в процессах теплообмена. Методом анизотропной проводимости решена тепловая задача и найдены предельные значения искомого эффективного коэффициента теплопроводности в z-направлении (см. рис. 1).

6.1. *Бесконечная горизонтальная проводимость*

Подстановка соотношения (28) в (18) дает выражение для плотности потока через ячейку

$$J_q = -\lambda_2\left[f_q + \left(\frac{\kappa}{V_i}\right)^2 \frac{1}{T_0\Delta\lambda_{21}}\frac{f_t(1-f_q)}{\mathrm{den}_1}\right]\nabla_b T, \quad (30)$$

где $f_q = \dfrac{f_1}{\beta+(1-\beta)f_1}$.

Коэффициент при градиенте температуры в выражении (30) является искомым эффективным коэффициентом теплопроводности ячейки $\tilde{\lambda}_{A1}$ с учетом работы в ней теплового диполя (второе слагаемое в квадратных скобках):

$$\tilde{\lambda}_{A1} = \lambda_2\left[f_q + \left(\frac{\kappa}{V_i}\right)^2 \frac{1}{T_0\Delta\lambda_{21}}\frac{f_t(1-f_q)}{\mathrm{den}_1}\right]. \quad (31)$$

Интересно, что в выражении (31) эффективный коэффициент теплопроводности ячейки зависит не только от теплопроводящих свойств элементов ячейки, но и от коэффициентов гидропроводности включения, диффузии растворенного в воде вещества и средней концентрации раствора в частице.

6.2. *Нулевая горизонтальная проводимость*

Выражение для эффективного коэффициента теплопроводности ячейки $\tilde{\lambda}_{A0}$ с нулевой горизонтальной проводимостью получается после подстановки (29) в (20):

$$\tilde{\lambda}_{A0} = \lambda_2\left[I_3 + \left(\frac{\kappa}{V_i}\right)^2 \frac{\alpha\beta}{\lambda_1 T_0}\frac{I_1^2}{\mathrm{den}_0}\right].$$

7. Результаты

Представленные ниже результаты расчетов дают границы интервала, внутри которого находится значение эффективного коэффициента теплопроводности ячейки, элементы которой обладают изотропными свойствами. Ячейка с бесконечной горизонтальной проводимостью элементов дает верхнее предельное значение, а система с нулевой горизонтальной проводимостью – нижнее предельное значение.

Чаще всего коэффициент теплопроводности льда превышает коэффициент теплопроводности пористых сред, поэтому во всех расчетах были приняты следующие значения: $\lambda_1 = 1{,}54$ Вт/(м·град), $\lambda_2 = 2{,}2$ Вт/(м·град).

На рис. 3 приведены графики, показывающие влияние объемной доли включений во льду n на значение эффективного коэффициента теплопроводности, когда пористое пространство частицы заполнено чистой водой. Из графиков *1–3* следует, что при высокой концентрации диполей (объемная доля частиц $n \sim 0{,}5$) и при коэффициенте гидропроводности частицы, превышающем 10^{-14} м^3·с/кг, становится заметным вклад диполей в общую теплопроводность системы. По сравнению со средой без тепловых диполей эффективный коэффициент теплопроводности увеличивается в 1,5–4 раза.

Однако следует заметить, что при высокой гидропроводности среды ($K_h > 10^{-13}$ м^3·с/кг) температура проникновения льда в поры частицы приближается к нулю, поэтому эффект тепловых

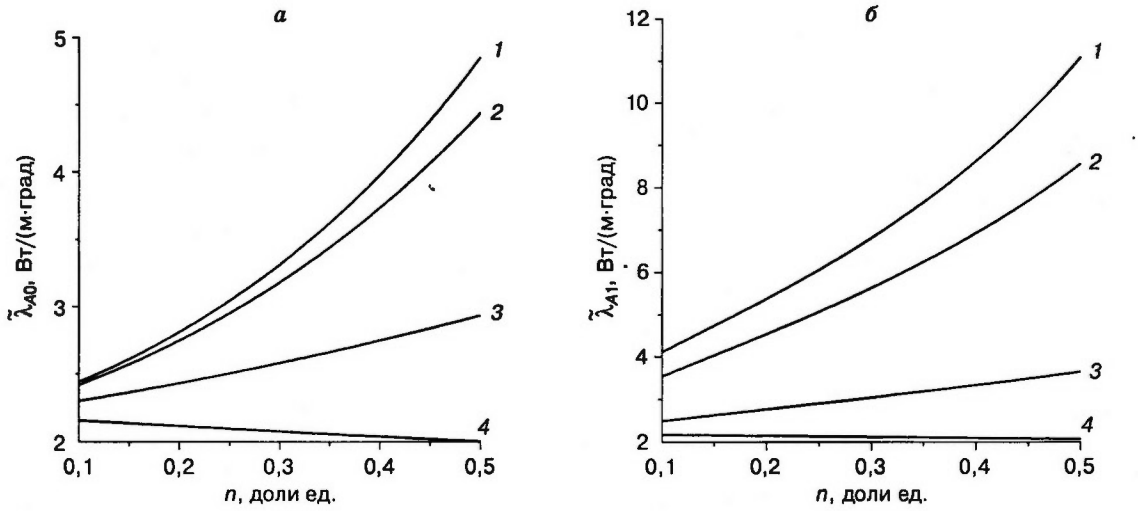

Рис. 3. Зависимость эффективного коэффициента теплопроводности ячейки от доли объема (n), занимаемого частицей в кубической ячейке, при нулевой концентрации раствора ($c_{s0} = 0$), нулевой (*а*) и бесконечной (*б*) горизонтальной проводимости и различных значениях коэффициента гидропроводности частицы:

1 – $K_h = 10^{-12}$; *2* – $K_h = 10^{-13}$; *3* – $K_h = 10^{-14}$; *4* – $K_h = 10^{-15}$ м^3·с/кг.

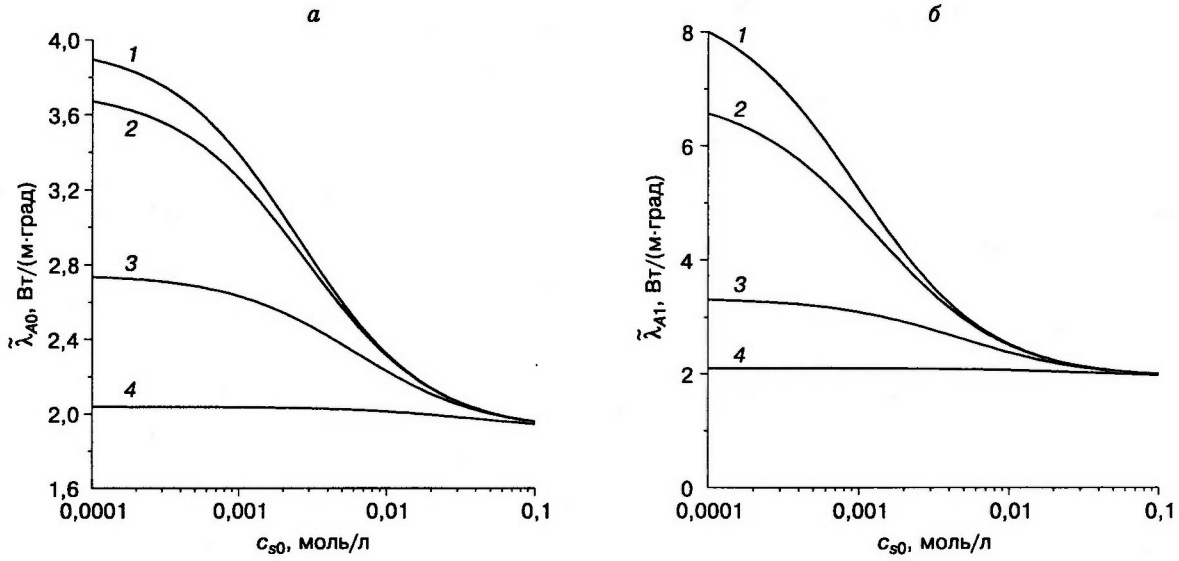

Рис. 4. Зависимость эффективного коэффициента теплопроводности кубической ячейки от концентрации раствора (c_{s0}) при нулевой (*а*) и бесконечной (*б*) горизонтальной проводимости и различных значениях коэффициента гидропроводности частицы:

1 – $K_h = 10^{-12}$; *2* – $K_h = 10^{-13}$; *3* – $K_h = 10^{-14}$; *4* – $K_h = 10^{-15}$ м^3·с/кг; $D_n = 10^{-10}$ м^2/с; $n = 0{,}4$.

диполей может проявиться только в весьма узком диапазоне температур. Регистрация эффекта в высокопроводящих средах требует постановки специальных экспериментов.

При низкой гидропроводности частиц (K_h<10^{-14} м^3·с/кг) диполи практически не влияют на эффективный коэффициент теплопроводности, даже при их высоком содержании в массиве льда (см. рис. 3, график *4*), т. е. свойства среды практически не отличаются от характеристик льда с неподвижными включениями.

На рис. 4 показано влияние средней концентрации раствора на эффективную теплопроводность среды при постоянной концентрации частиц $n = 0{,}4$. Из графиков видно, что растворимое вещество начинает оказывать влияние на работу тепловых диполей при достаточно малой концентрации ~0,0001 моль/л. При концентрации, превышающей 0,01 моль/л, теплопроводность среды практически не отличается от теплопроводящих свойств льда с неподвижными включениями. Таким образом, даже малые примеси в воде оказывают значительное влияние на поведение пористых частиц во льду. Увеличение концентрации растворимых веществ в жидкой фазе (воде) уменьшает миграционные свойства частиц.

Опыты по изучению влияния движения пористых частиц во льду на его теплопроводность в области температуры фазового перехода, по-видимому, не проводились. Однако перемещение включений во льду в градиентном поле температуры присуще не только пористым частицам, но и твердым непроницаемым частицам [*Römkens, Miller, 1973*], каплям рассола [*Harrison, 1965*] и газовым пузырькам [*Stehle, 1966*]. Такое движение сопровождается, так же как и для пористых частиц, парными фазовыми переходами плавление–кристаллизация на противоположных границах включения, что в свою очередь приводит к увеличению эффективного коэффициента теплопроводности льда с включениями. Эта зависимость будет тем заметнее, чем выше скорость движения включений, т. е. вблизи температуры плавления льда.

Измерения коэффициента теплопроводности морского льда [*Trodahl et al., 2001*] показывают, что постепенное уменьшение теплопроводящей способности льда с увеличением температуры сменяется резким подъемом при $T = -7$ °С, а вблизи температуры −2 °С коэффициент теплопроводности морского льда почти в 1,3 раза выше коэффициента теплопроводности чистого льда. Не исключено, что возрастание теплопроводящей способности морского льда при высоких температурах есть следствие парных фазовых переходов.

Работа выполнена в рамках Интеграционной программы „Опасные природные явления на поверхности суши. Фундаментальные проблемы функционирования и существования криосферы в условиях глобальных изменений природной среды" и при финансовой поддержке РФФИ (грант № 05-05-64228) и Губернской академии (грант 2004 г.).

Литература

Бардзокас Д.И., Зобнин А.И. Математическое моделирование физических процессов в композиционных материалах периодической структуры. М., Едиториал УРСС, 2003, 376 с.

Бровка Г.П. Тепло- и массоперенос в природных дисперсных системах при промерзании. Минск, Навука і тэхніка, 1991, 195 с.

Горелик Я.Б., Колунин В.С. Физика и моделирование криогенных процессов в литосфере. Новосибирск, Изд-во СО РАН, фил. „Гео", 2002, 317 с.

Гречищев С.Е., Чистотинов Л.В., Шур Ю.Л. Криогенные физико-геологические процессы и их прогноз. М., Недра, 1980, 384 с.

Дерягин Б.В., Чураев Н.В., Муллер В.М. Поверхностные силы. М., Наука, 1985, 398 с.

Колунин В.С. Тепломассоперенос в пористой среде с ледяными включениями // Криосфера Земли, 2004, т. VIII, № 4, с. 45–53.

Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. М., Наука, 1987, ч. 1, 464 с.

Хаазе Р. Термодинамика необратимых процессов. М., Мир, 1967, 544 с.

Harrison J.D. Measurement of brine droplet migration in ice // J. Appl. Phys., 1965, vol. 36, No. 12, p. 3811–3815.

Römkens M.J.M., Miller R.D. Migration of mineral particles in ice with a temperature gradient // J. Colloid Interface Sci., 1973, vol. 42, No. 1, p. 103–111.

Stehle N.S. Migration of bubbles in ice under a temperature gradient // Proc. of the Conf. on Physics of Snow and Ice, Inst. of Low Temperature Sci., Hokkaido, Univ. Sapporo, Japan, 1966, p. 219–232.

Trodahl H.J., Wilkinson S.O.F., McGuinness M.J., Haskell T.G. Thermal conductivity of sea ice; dependence on temperature and depth // Geophys. Res. Lett., 2001, vol. 28, No. 7, p. 1279–1282.

Поступила в редакцию
25 октября 2004 г.