

СНЕЖНЫЙ ПОКРОВ И ЛЕДНИКИ

УДК 910.1 551.8

ЛАГРАНЖЕВ МЕТОД РАСЧЕТА ВОЗРАСТА И ИЗОТОПНОГО СОСТАВА ЛЬДА
В ТРЕХМЕРНОЙ МОДЕЛИ АНТАРКТИЧЕСКОГО ЛЕДНИКОВОГО ЩИТА

О.О. Рыбак^{1,2}, Ф. Хёбрехтс^{2,3}

¹ Сочинский научно-исследовательский центр РАН, 354000, Сочи, ул. Театральная, 8а, Россия, snic@sochi.ru

² Институт полярных и морских исследований им. А. Вегенера, D-27515, Бремерхафен, Германия

³ Свободный университет Брюсселя, географический ф-т, В-1050, Брюссель, Бельгия

Для описания адвекции в математических моделях ледниковых щитов используются два подхода – эйлеров и лагранжев. В настоящей работе сравнивается традиционный эйлеров метод с относительно новым в гляциологических приложениях лагранжевым. Лагранжев метод, заключающийся в отслеживании траекторий условных частиц льда (трассеров) внутри ледникового щита, может применяться для решения задач датировки льда, восстановления его изотопного состава и для построения поля любой консервативной характеристики, которая переносится с потоком льда. Один из алгоритмов лагранжева метода, получивший название Particle-in-Cell (PIC), состоит в последовательном восстановлении траектории трассера по мере его перемещения в эволюционирующем ледниковом щите и фиксации консервативной характеристики вдоль траектории. Этот алгоритм достаточно прост в применении и эффективен, однако требует значительного расхода машинного времени. Основное его преимущество по сравнению с эйлеровым подходом заключается в том, что он не требует введения дополнительной диффузии на нижней границе для стабилизации вычислений, что существенно повышает его точность в нижней части ледникового щита. Метод PIC дает возможность непосредственно получить траекторию частицы, что важно для восстановления особенностей потока, и непосредственное распределение искомой характеристики на изохронной поверхности. Оптимальное использование лагранжева подхода заключается в соблюдении разумного баланса между вычислительными затратами и требуемой точностью.

Ледниковый щит, возраст льда, изотопный состав льда, математическая модель, Антарктида

LAGRANGIAN METHOD FOR THE CALCULATION OF AGE AND ISOTOPIC COMPOSITION
OF ICE IN A 3D ANTARCTIC ICE-SHEET MODEL

O.O. Rybak^{1,2}, Ph. Huybrechts^{2,3}

¹ Sochi Scientific Research Centre RAS, 354000, Sochi, Teatrnaya str., 8a, Russia, snic@sochi.ru

² Alfred Wegener Institut für Polar- und Meeresforschung, Postfach 120161, D-27515, Bremerhaven, Germany

³ Departement Geografie, Vrije Universiteit Brussel, Pleinlaan 2, B-1050, Brussels, Belgium

Two basic approaches exist for describing advection in the ice sheet model. We proceed with comparing traditional Eulerian approach with a rather new in glaciological applications Lagrangian one. Particle tracing in the ice sheet is required to deal with such problems as detailed ice dating, establishing its isotopic composition, or distribution of any other conservative characteristic, which is advected with the ice flow. Within the frame of the Particle-in-Cell (PIC) algorithm, a particle's trajectory is constructed by numerical interpolation as it moves through an evolving ice sheet within a regular 3D grid. The algorithm is conceptually straightforward, but demanding in terms of its practical implementation. The main advantage of the algorithm as compared to a pure Eulerian approach is that it is diffusion free, which makes it much more accurate in the lower part of the ice sheet. Application of PIC immediately yields the trajectories of the particles, which is important for reconstruction of the flow peculiarities and the distribution of transported properties on isochronous surfaces. To implement it in the most effective way it is necessary to follow accurate balance between computational overhead and designed accuracy.

Ice sheet, ice chronology, isotopic composition, mathematical model, Antarctica

ВВЕДЕНИЕ

Решение задачи адвекции в математическом моделировании ледниковых щитов связано, прежде всего, с восстановлением хронологии льда и его

изотопного состава, а также с необходимостью расчета адвекции тепла при расчете поля температуры льда. Традиционно уравнение адвекции решается в

рамках эйлерова метода, т. е. решение находится в узлах пространственной сетки. Это, однако, не единственно возможный подход. В последние несколько лет в различных гляциологических приложениях стали использоваться лагранжевы методы.

Лагранжевы методы не являются совершенно новыми в математическом моделировании. Они применяются в различных научных и практических приложениях, начиная с того времени, как для этих целей стали использоваться сами компьютеры. По-видимому, одними из первых областей приложения лагранжевых методов стали гидродинамика и физика плазмы [Harlow, 1964]. Уже на ранней стадии было указано на основную трудность применения чисто лагранжева метода. П. Веландер [Welanders, 1955] показал, что множество жидких частиц, изначально регулярно распределенных, впоследствии деформируется настолько, что его становится невозможно численно интегрировать. В связи с этим на практике чаще используют алгоритмы, сочетающие в себе оба метода – эйлеров и лагранжев.

В начале 1950-х гг. графический лагранжев алгоритм был предложен для решения баротропного уравнения вихря в задаче прогноза погоды [Fjortoft, 1952]. Эта работа стала пионерной в ряду так называемых полулагранжевых (или квазилагранжевых) методов (Semi-Lagrangian Technique, SLT). Само понятие полулагранжева метода было введено несколько позже в работе [Wiin-Nielsen, 1959]. В основе его лежит идея обновления набора лагранжевых частиц (трассеров) на каждом временном шаге интегрирования [Staniforth, Côte, 1991]. Разбор этого алгоритма, по существу являющегося переформулированным вариантом разностной схемы Лакса–Вендроффа, в которой число Куранта может быть больше 1 [Bermejo, 1990], выходит за рамки настоящей работы. Укажем только, что после существенных доработок и усовершенствований в 1960–1980-х гг. [Krishnamurti, 1962; Sawyer, 1963; Bates, McDonald, 1982] он стал широко применяться на практике, в частности, при численных прогнозах погоды. В гляциологических приложениях полулагранжевы методы начали использоваться несколько лет назад для моделирования эволюционирующих стратиграфических структур гренландского и антарктического ледниковых щитов, для восстановления их изотопного баланса, для построения вертикальных кривых температуры и изотопного состава льда в виртуальных ядрах [Clarke, Marshall, 2002; Tarasov, Peltier, 2003; Clarke et al., 2005; Lhomme et al., 2005a, b].

Для целей настоящего исследования SLT не подходит по ряду причин. Во-первых, особенности алгоритма SLT таковы, что в процессе расчетов теряется индивидуальность каждой частицы, поскольку, как указано выше, на каждом временном шаге производится обновление набора трассеров.

Во-вторых, свойства переносимых консервативных полей интерполируются на каждом временном шаге, что, по сути, означает их пространственное сглаживание. Вместо SLT мы используем другую комбинацию эйлерова и лагранжева методов, получившую название Particle-in-Cell (PIC) [Harlow, 1964; Hockney, Eastwood, 1992]. Так же как и SLT, алгоритм PIC предполагает использование регулярной пространственной сетки, на которой рассчитываются модельные поля скорости потока льда. Трассер, который переносит некоторое свойство поля, перемещается внутри ячейки, образованной узлами сетки (отсюда происходит название метода). Компоненты скорости потока интерполируются в точку с текущими координатами трассера. Поскольку в нашей работе исследуются консервативные поля и, следовательно, трассеры не взаимодействуют между собой и с полем скорости, задача построения траектории частицы сводится к последовательному интегрированию компонент скорости.

В работе [Rybak, Huybrechts, 2003] в простой двумерной схематической модели исследованы достоинства и недостатки обоих методов – эйлерова и лагранжева (PIC-метода). В этой же работе обоими методами изучено поле возраста льда в стационарной версии трехмерной антарктической модели, описанной в [Huybrechts, de Wolde, 1999; Huybrechts, 2002]. Установлено, что эйлеров метод дает большую ошибку в оценке возраста льда по сравнению с лагранжевым методом. Относительная разница в датировках велика у боковых границ и особенно у нижней границы щита, где эйлеров метод прогнозирует возраст с ошибкой порядка нескольких процентов относительно аналитического решения (в прогнозе лагранжевым методом она составляет доли процента). Это обстоятельство делает лагранжев подход перспективным методом в палеоклиматических реконструкциях, поскольку возраст льда экспоненциально растет с глубиной, и максимально точная датировка в нижних слоях ледниковых щитов представляет собой важную задачу, которая возникает, например, в ходе обработки данных глубокого бурения.

Потенциальные ошибки лагранжева метода связаны, прежде всего, с ошибками интерполяции компонент поля скорости в точку текущего положения трассера. Эта ошибка аккумулируется по мере движения трассера и пропорциональна его возрасту.

Существенный недостаток лагранжева метода связан с потерей информации с глубиной по мере того, как трассеры рассеиваются в пространстве и покидают ледниковый щит через боковые границы. Это обуславливает появление “областей тени”, т. е. областей, куда трассеры не попадают и где информация о поле возраста (или иного консервативного свойства) отсутствует.

Настоящее исследование является продолжением работы [Rybak, Huybrechts, 2003]. Здесь применяются лагранжевы и эйлеровы методы для исследования двух консервативных полей – поля возраста и поля изотопного состава льда в эволюционирующей антарктической модели. В модели воспроизводятся климатические условия на поверхности шита, его топография и поле скоростей на протяжении четырех последних ледниковых циклов (420 тыс. лет).

Интерес к моделированию изотопного состава льда не случаен. Лед в континентальных ледниковых щитах, по сути, представляет собой природный архив косвенных данных о климате и циркуляции атмосферы в прошлом. Изотопный состав льда, который практически линейно зависит от температуры воздуха у верхней границы термической инверсии, является важнейшим для палеорекострукций косвенным индикатором вариаций температуры воздуха [Robin, 1977]. Естественно, чем глубже залегают лед, тем дальше в прошлое отстоит и время формирования его изотопного состава. Однако при анализе его необходимо учитывать фактор адвекции: если скважина пробурена не на ледоразделе, то лед в нижней части керна мог быть отложен на поверхности щита в сотнях километров вверх по потоку от скважины. К настоящему времени в Антарктическом ледниковом щите пробурено четыре скважины, возраст льда в глубинных частях их превышает 400 тыс. лет. Это скважины на станциях Восток, Купол Фуджи, Купол Конкордия и Конен. Интерпретация изотопных ($\delta^{18}\text{O}$ и δD) рядов из кернов этих станций позволила восстановить ход климатических вариаций температуры воздуха над Антарктидой [Petit et al., 1999; Watanabe et al., 2003; EPICA community members, 2004, 2006] и их связь с колебаниями температуры в Северном полушарии в течение последнего ледникового цикла [EPICA community members, 2006]. Согласно модельным оценкам, возраст наиболее древнего льда в центральной части Восточно-Антарктического ледникового щита может превышать 1,2 млн лет [Huybrechts, Rybak, 2005], и предварительные модельные результаты относительно вероятного изотопного состава льда могут быть очень полезны для последующих полевых исследований.

ЭЙЛЕРОВО И ЛАГРАНЖЕВО ОПИСАНИЕ АДВЕКЦИИ

Обозначим через A некоторое консервативное свойство среды. Эволюция поля консервативной примеси описывается уравнением

$$\frac{dA}{dt} = 0. \quad (1)$$

Рассмотрим в пространстве систему координат с горизонтальными осями x, y и вертикальной осью z и точку, чьи координаты в начальный момент времени (x_0, y_0, z_0) . Пусть в момент времени t эта точка переместилась в точку (x_t, y_t, z_t) . Если перемещение частицы считается функцией ее начальных координат, то такой способ описания называется лагранжевым [Lliboutry, 1987]:

$$\begin{aligned} x_t - x_0 &= U_L(x_0, y_0, z_0, t), \\ y_t - y_0 &= V_L(x_0, y_0, z_0, t), \\ z_t - z_0 &= W_L(x_0, y_0, z_0, t). \end{aligned} \quad (2)$$

Из (2) следует, что положение частицы (радиус-вектор \mathbf{X}) описывается уравнением

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{U}(x, y, z, t), \quad (3)$$

где \mathbf{U} – вектор скорости потока льда с компонентами u, v, w . Начальные условия устанавливаются, что трассер в начальный момент времени t_0 находился на поверхности щита $H + h$:

$$\mathbf{X}(t_0) = [x_0, y_0, z = (H + h)_{x_0, y_0, t_0}], \quad (4)$$

где H – толщина щита; h – абсолютная высота подстилающей поверхности.

Если перемещение частицы льда рассматривается как функция конечных координат, то такой способ описания называется эйлеровым. В случае эйлерова описания адвекции наблюдатель отслеживает изменения в окружающем его эволюционирующем поле, находясь в фиксированной точке пространства. Этот способ удобен для реализации на регулярных пространственных сетках. В случае, если адвекция описывается в лагранжевых терминах, наблюдатель находится в движущейся точке пространства и описывает эволюцию среды, перемещаясь вместе с ней [Staniforth, Côte, 1991]. Движущейся точке пространства можно поставить в соответствие частицу (трассер), которая перемещается вместе с движущимся потоком. В данной работе мы ограничиваемся рассмотрением только перемещения пассивных трассеров, т. е. частиц, которые не взаимодействуют друг с другом и с окружающей средой. Такой трассер может переносить любое консервативное свойство (по терминологии [Clarke, Marshall, 2002], быть *маркером* поля). Это может быть маркер возраста льда (времени отложения частицы на поверхность ледникового щита), изотопного состава льда (фактически температуры воздуха в момент выпадения осадков, поскольку последняя функционально связана с ним), координаты происхождения на поверхности щита и т. д. Обеспечив достаточное количество трассеров внутри объема ледникового щита, можно построить поля распределения любой из пере-

численных выше характеристик. Более того, указанный способ сразу дает картину линий тока внутри щита.

В векторной форме эйлерово уравнение адвекции запишется как

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \mathbf{U} \nabla A = 0. \quad (5)$$

Граничное условие на поверхности щита $A(x, y, z_{H+h}, t) = A_0$. Граничное условие у подстилающей поверхности принимает вид

$$\frac{\partial A}{\partial t} = B \frac{\partial A}{\partial z} - \left[u \Big|_{z=h} \frac{\partial A}{\partial x} \right] - \left[v \Big|_{z=h} \frac{\partial A}{\partial y} \right],$$

где B – скорость базального таяния (м/год в ледовом эквиваленте); $u \Big|_{z=h}$, $v \Big|_{z=h}$ – компоненты вектора скорости базального скольжения. Если базальная температура (температура на разделе ледниковый щит–подстилающая порода) ниже точки плавления, то $B = 0$ и $u \Big|_{z=h}$ и $v \Big|_{z=h}$ также равны нулю и граничное условие становится неопределенным. Чтобы избежать этого, в [Huybrechts, 1994] было предложено добавить в правую часть (5) дополнительный диффузионный член. В работе [Calov et al., 1998] показано, что при малых значениях диффузионного члена искажения в поле A незначительны и проявляются только при приближении к нижней границе щита.

МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ

Антарктическая модель. В настоящей работе для описания Антарктического ледникового щита используется трехмерная термомеханическая модель, подробно описанная в статьях [Huybrechts, de Wolde, 1999; Huybrechts, 2002]. Модель воспроизводит эволюцию топографии поверхности щита и топографии подстилающего ложа, баланс массы щита, изостатическое приспособление, трехмерные поля температуры льда и скорости растекания.

Растекание континентального льда описывается в терминах приближения мелкого льда (Shallow Ice Approximation, SIA [Hutter, 1983]). В рамках SIA считается, что деформации льда обуславливаются только тангенциальными напряжениями в горизонтальной плоскости. Поэтому модуль вектора горизонтальной скорости определяется локальными градиентами абсолютной высоты поверхности. Деформации шельфовых ледников определяются нормальными напряжениями и тангенциальными напряжениями в горизонтальной плоскости. Для обеспечения плавного перехода от континентальной области к шельфовой между ледниковым щитом и шельфовым льдом вводится переходная зона шириной 20 км, которая расположена в окрестностях линии налегания. Поток льда внутри зоны рассматривается как переходный от континентального к шельфовому, и в ней присутствует полный набор напряжений.

Как и в большинстве гляциологических приложений, скорости деформации связаны с напряжениями законом Глена с показателем степени $n = 3$ [Paterson, 1994].

Область интегрирования, которая заведомо превышает максимально возможное распространение континентальных и шельфовых ледников, представляет собой квадрат 5600×5600 км (281×281 узлов), Южный полюс расположен в центре области в точке с координатами (141, 141). Вертикальное разрешение модели 30 слоев, которые расположены неравномерно по глубине, уплотняясь по направлению к основанию щита. Вертикальная координата $\zeta(x, y)$ безразмерная, 0 (поверхность щита) $\leq \zeta(x, y) \leq 1$ (дно).

Эволюция модели во времени осуществляется внешним воздействием на баланс массы щита через изменение скорости аккумуляции и температуры его поверхности, а также посредством контроля миграции линии налегания через изменения уровня Мирового океана (так называемый климатический форсинг). В качестве форсинга использовались ряды аномалий температуры воздуха и уровня Мирового океана, восстановленные по изотопным рядам. Для восстановления аномалий температуры использованы ряд δD из керна льда станции Восток [Petit et al., 1999] и ряд аномалий уровня Мирового океана, восстановленный по данным $\delta^{18}O$ ряда SPECMAP [Imbrie et al., 1984].

В основу параметризации среднегодового количества осадков над Антарктидой (фактически баланса массы на поверхности, так как таяние отсутствует) положена зависимость этой величины от давления насыщенного водяного пара при температуре конденсации на верхней границе слоя инверсии [Lorius et al., 1985]. Особенности построения рядов форсинга обсуждаются в [Huybrechts, 2002].

Продолжительность численного эксперимента составила 420 тыс. модельных лет.

Формализация адвекции полей возраста и изотопного состава льда. Изучаемые нами консервативные характеристики – возраст льда и изотопный состав льда ($\delta^{18}O$). Изотопный состав связан с температурой воздуха у поверхности щита соотношением $\delta^{18}O = 0,755T_s - 7,6$. Простая линейная зависимость между температурой поверхности T_s и $\delta^{18}O$ означает, что в качестве маркера можно использовать непосредственно температуру, которая является составляющей климатического форсинга модели, а результирующее ее распределение в массе щита пересчитывать в $\delta^{18}O$ после окончания эксперимента.

Переменной A на поверхности присваивается значение $A_0 = t_{dep}$, если A – возраст, и $A_0 = T_s(t_{dep})$, если A – температура воздуха; t_{dep} – момент времени, когда частица льда (трассер) отложена на поверхности щита.

Численно интегрируя (5), находим эйлерово поле A на каждом временном шаге модели в узлах регулярной пространственной сетки.

Лагранжево поле A описывается набором трассеров, распределенных в массе щита. Трассеры стартуют с поверхности из каждого узла сетки, находящегося в области континентального щита или шельфового льда, каждые 100 модельных лет. Постепенно трассеры заполняют всю массу льда, и их количество становится пропорциональным его объему. Координаты трассеров на временном шаге $t + 1$ находятся из соотношений

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= x_t + u\Delta t, \\ y_{t+1} &= y_t + v\Delta t, \\ z_{t+1} &= z_t + w\Delta t, \end{aligned} \quad (6)$$

которое следует из формального определения метода (2). Позиции трассеров отслеживаются каждые 10 лет ($\Delta t = 10$ лет). Чтобы избежать накопления трассеров у нижней границы щита в областях, где отсутствует базальное таяние, считается, что трассер, пересекший границу 99%-й относительной глубины, покидает ледниковый щит через нижнюю границу. Перестают отслеживаться и трассеры, которые покидают область, соответствующую континентальному и шельфовому льду. Несмотря на кажущуюся простоту постановки эксперимента с лагранжевыми трассерами, его практическая реализация требует значительных затрат машинного времени, поскольку одновременное общее число отслеживаемых трассеров колеблется в пределах 2,5–5,5 млн в зависимости от фазы моделируемого ледникового цикла.

На рис. 1 показана горизонтальная проекция современного поля растекания антарктического

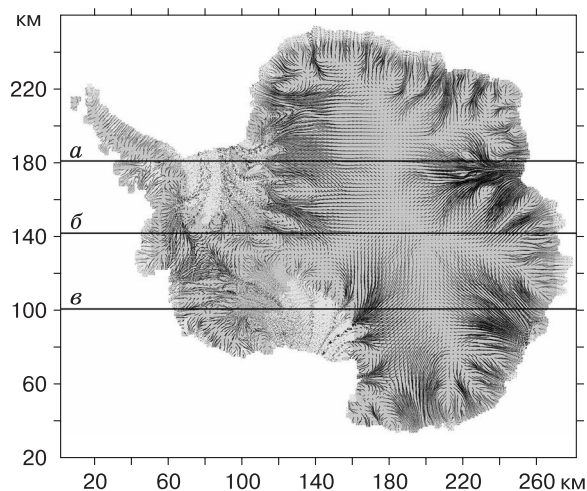


Рис. 1. Область континентального и шельфового льда в Антарктической модели:

a, b, v – вертикальные разрезы (трансекты).

льда. Маркировка границ области интегрирования дана в соответствии с нумерацией узлов пространственной сетки с шагом 20 км. Южный полюс расположен в точке с координатами (141, 141). Нанесены горизонтальные координаты трассеров, которые находились в массе щита в течение последних 10 тыс. лет. Они дают картину линий тока поля растекания льда. Очевидно, что эти линии кажутся непрерывными в области континентального льда и представляют собой последовательность точек в области шельфового льда, концентрируясь вдоль выводных потоков. Хорошо видны ледоразделы, на которых горизонтальное перемещение льда отсутствует или крайне незначительно. Горизонтальные проекции координат трассеров фактически превращаются здесь в точки. Горизонтальные линии a, b, v на рис. 1 показывают положение вертикальных разрезов (трансектов). Фиксируя координаты всех трассеров, которые попадают в полосу ± 10 км от трансекта, получаем картину линий тока в вертикальной плоскости.

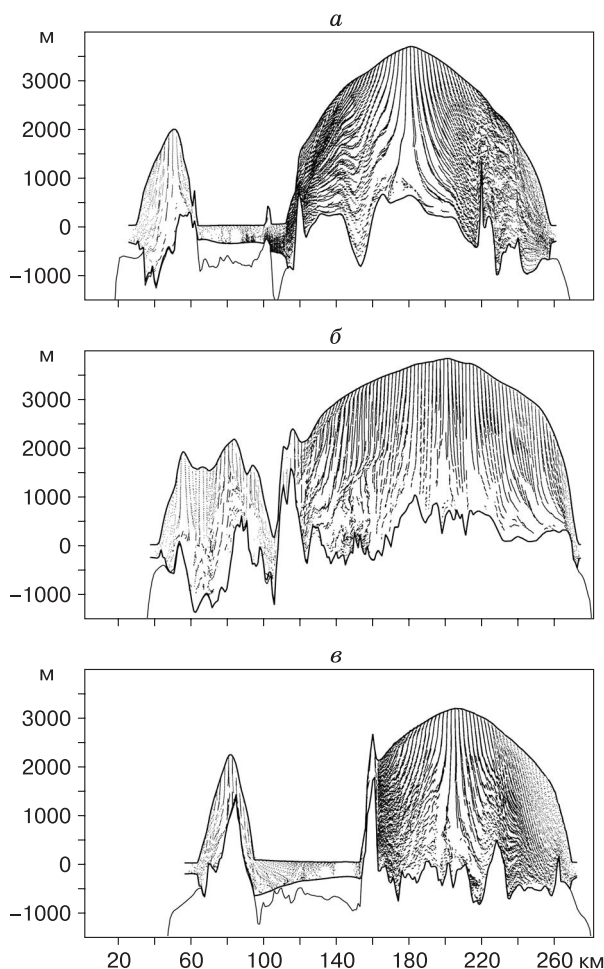


Рис. 2. Проекция координат трассеров на плоскость вертикальных разрезов a, b, v .

На рис. 2 показаны линии тока, берущие начало на поверхности в четных узлах сетки. На трансектах видно, что в центральных областях Антарктиды трассеры перемещаются в массе шита практически вертикально, влияние горизонтальной составляющей скорости проявляется только при приближении к подстилающей поверхности и по мере приближения к окраинам материка. Нарушения в потоке трассеров заметны в окрестностях препятствий. Очевидно, что здесь горизонтальный поток обгибает неровности подстилающей поверхности. На рис. 2, а это создает картину, которая качественно напоминает турбулентное течение в жидкости. Области расхождения линий тока вблизи подстилающей поверхности, хорошо заметные

на рис. 2, б в центральной части Восточной Антарктиды, создают своего рода “теневые зоны”, в которых трассеры отсутствуют, следовательно, отсутствует информация об изучаемом поле.

СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭЙЛЕРОВА И ЛАГРАНЖЕВА МЕТОДОВ

Непосредственное сравнение эйлеровых и лагранжеевых результатов невозможно. Для этого необходимо выполнить предварительную интерполяцию либо лагранжеевых данных в узлы пространственной сетки, либо эйлеровых данных на какую-либо изохронную поверхность. В последнем случае лагранжеевы данные могут быть получены непосредственно на изохронной поверхности

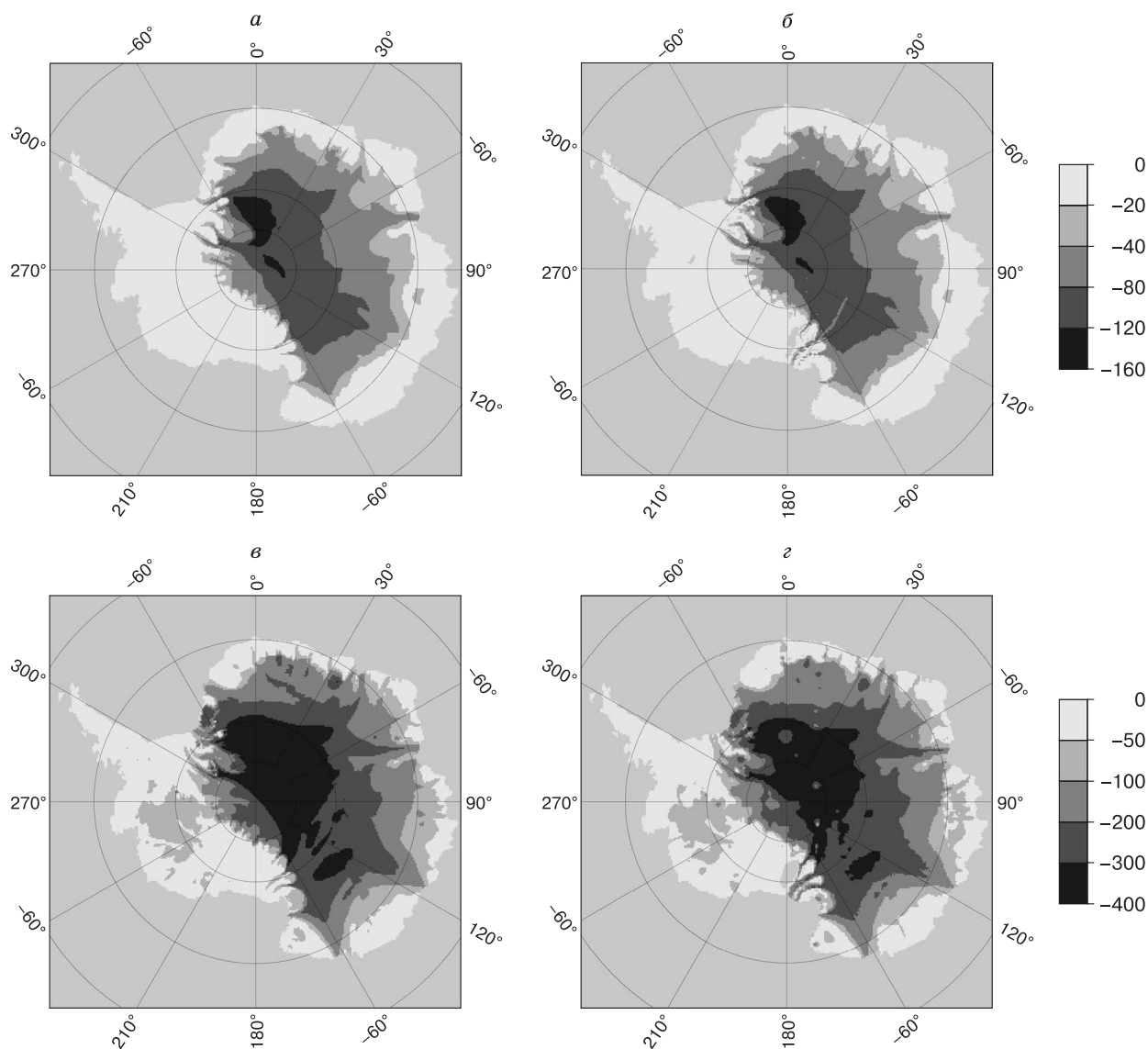


Рис. 3. Возраст льда по эйлерову (а, в) и лагранжееву (б, г) методам:
а, б – на 50 %, в, г – на 90 % относительной глубины. Возрастные шкалы даны в тыс. лет.

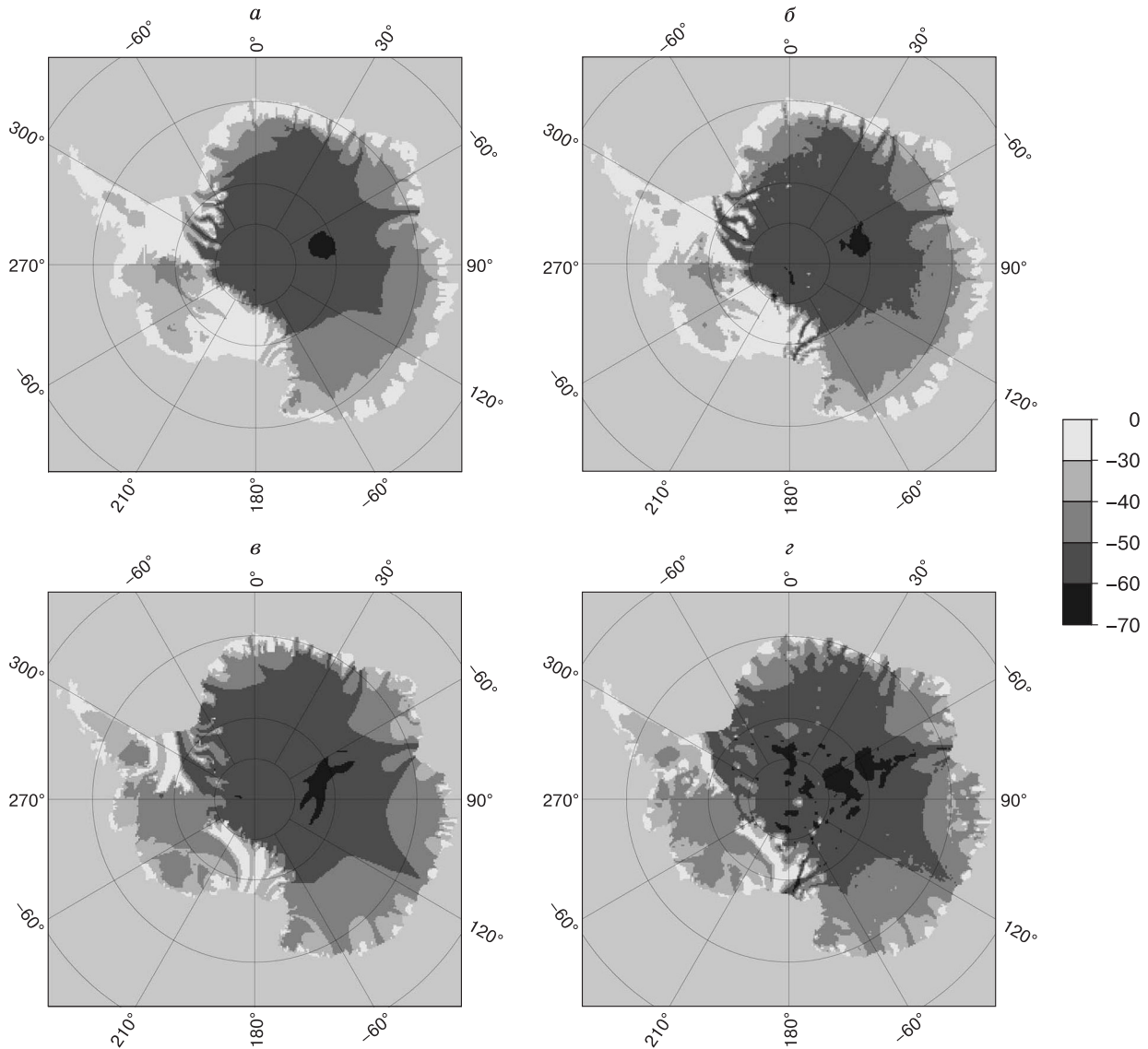


Рис. 4. Изотопный состав льда по эйлерову (а, в) и лагранжеву (б, г) методам:

а, б – на 50 %, в, г – на 90 % относительной глубины. Изотопная шкала дана в промилле.

простым отбором трассеров одного возраста. Эйлеровы же поля возраста (или изотопного состава) необходимо интерполировать из узлов сетки на выбранную изохронную поверхность. Таким образом, говорить о точном сравнении методов некорректно. Способ сравнения (на относительных глубинах или на изохронных поверхностях) будет содержать ошибку интерполяции результатов, полученных одним из двух сравниваемых методов. Тем не менее можно восстановить качественную картину расхождений между двумя методами.

Зафиксируем позиции всех трассеров, попавших в слой $\alpha_k = \zeta_k \pm w\Delta t$, где w – вертикальная скорость; ζ_k – выбранная относительная глубина. Осреднив значения маркеров у всех трассеров в

радиусе пространственного шага сетки (20 км) от узла сетки (i, j) и в указанном слое α_k , присвоим полю в узле (i, j) полученное среднее значение. На рис. 3 представлены эйлеровы и лагранжевы поля возраста льда на относительных глубинах 50 и 90 % ($k = 0,5$ и $k = 0,9$). Поля на горизонте $k = 0,5$ (см. рис. 3, а, б) очень схожи. Различия проявляются лишь в деталях. В частности, больший возраст имеет лед в выводных потоках на шельфовых ледниках Фильхнера и Росса. В лагранжевом поле в полосе $80\text{--}82^\circ$ ю.ш., $120\text{--}150^\circ$ в.д. видна полоса относительно более молодого льда, которая отсутствует в эйлеровом поле. Существенные различия между эйлеровым и лагранжевым возрастом видны на горизонте $k = 0,9$ (см. рис. 3, в, г). Кроме

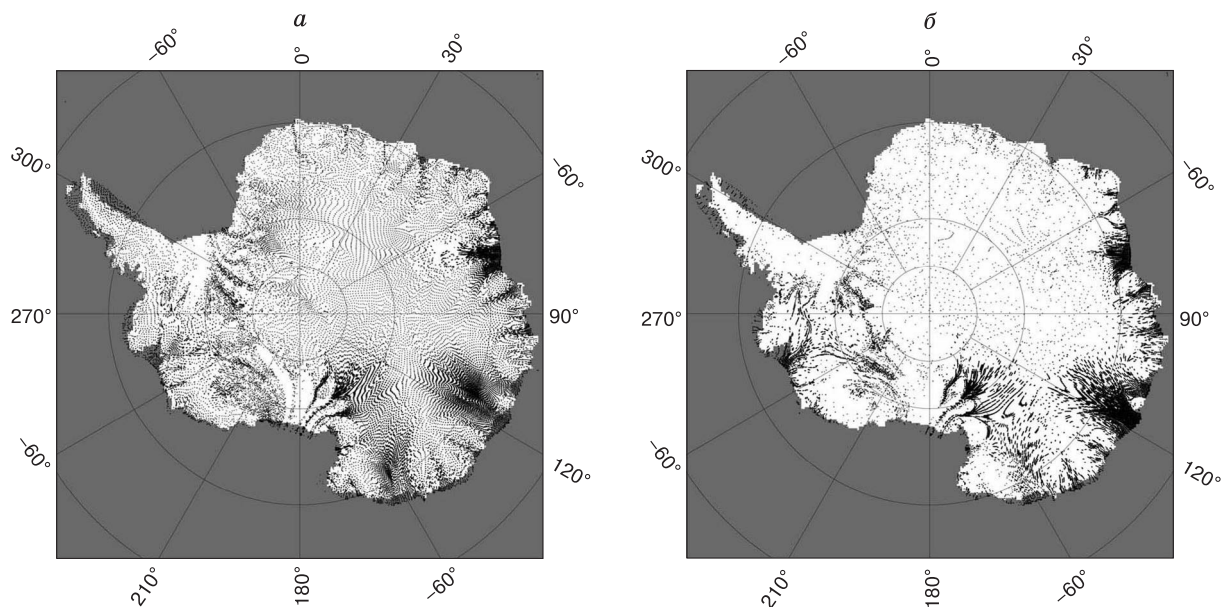


Рис. 5. Распределение трассеров на 50 % (а) и на 90 % (б) относительной глубины.

более старого льда в выводных потоках (как и на $k = 0,5$), отметим фрагментарный характер лагранжева поля во внутренних районах Восточной Антарктиды.

Аналогичные выводы можно сделать относительно эйлеровых и лагранжевых полей изотопного состава (рис. 4). Следует отметить более “холодный” лед в выводных потоках на шельфовый лед и фрагментарность поля на горизонте $k = 0,9$ во внутренних районах Восточной Антарктиды. Качественные различия между эйлеровы-

ми и лагранжевыми полями возраста и изотопного состава заметны на горизонте $k = 0,9$: поля возраста намного более гладкие, чем поля изотопного состава. “Холодный” лед в эйлеровом поле на $k = 0,9$ (см. рис. 4, в) сосредоточен в одном пятне в секторе $76-80^\circ$ ю.ш., $60-120^\circ$ в.д. В лагранжевом поле (см. рис. 4, г) пятна “холодного” льда не ограничены указанным сектором. По-видимому, вследствие диффузии в эйлеровом поле в придонной части стираются мелкие детали поля изотопного состава.

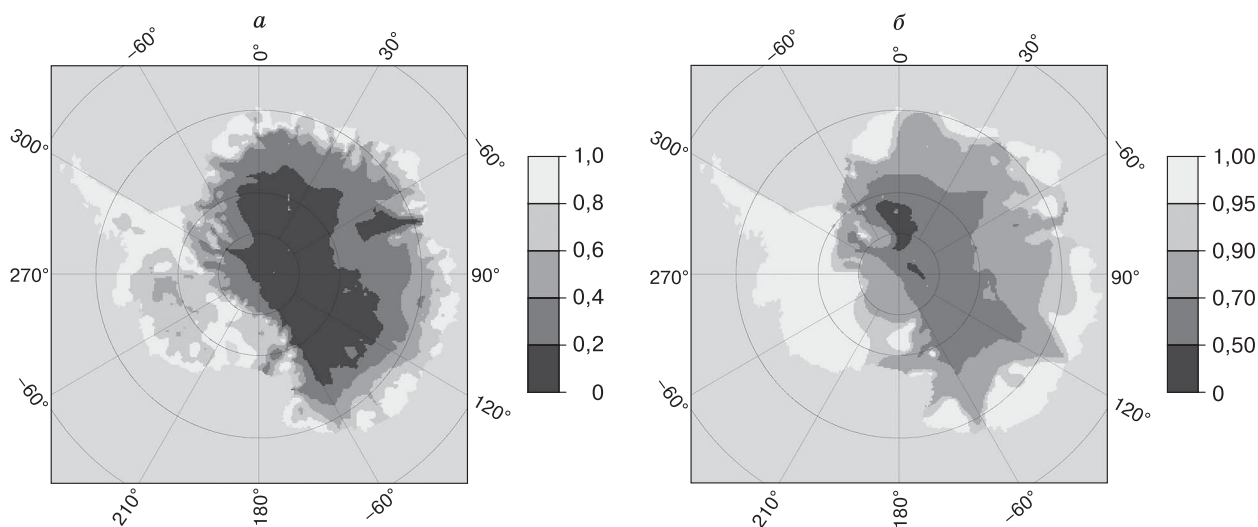


Рис. 6. Относительные глубины изохронных поверхностей 15 тыс. лет (а) и 120 тыс. лет (б), полученные лагранжевым методом.

Шкалы даны в относительных глубинах $0 \leq \zeta \leq 1$.

Выше упоминалось о рассеянии трассеров с глубиной вследствие того, что трассеры покидают область через боковые границы. На рис. 5 приведены трассеры, попадающие в слой α_k (эти трассеры были использованы для построения рис. 3, б, г и 4, б, г). Очевидно, что распределение трассеров неравномерно, они концентрируются ближе к береговым концам выводных потоков льда, причем эта концентрация заметнее на горизонте $k = 0,9$ (см. рис. 5, б).

Как указывалось ранее, лагранжев метод дает непосредственное распределение характеристик поля на изохронных поверхностях. Можно поставить задачу иначе – рассчитать относительную глубину изохронной поверхности, соответствующую заданным моментам времени в прошлом. Зафиксировав положение трассеров, возраст которых, например, $t_1 = 15$ тыс. лет и $t_2 = 120$ тыс. лет, построим поле глубин соответствующих изохронных поверхностей (рис. 6, а, б). Сопоставляя эти карты с картами толщины льда, можно получить картину распределения в пространстве льда определенного возраста. В рамках эйлерова подхода аналогичные расчеты потребовали бы интерполяции положения поверхности между узлами сетки.

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ

В рамках эйлерова метода рассчитанные поля возраста и изотопного состава более гладкие по сравнению с полученными по лагранжеву методу. Поскольку эйлеровы расчеты более экономичны, этот метод можно рекомендовать для предварительного анализа, для получения общей картины пространственного распределения изучаемой характеристики льда. Немаловажное с практической точки зрения преимущество эйлерова метода состоит в том, что оценки получаются в узлах сетки и графическое представление результатов не требует дополнительных интерполяционных процедур.

Лагранжевы оценки рассчитываются непосредственно на изохронных поверхностях внутри ледникового щита. Для того чтобы сравнить результаты с эйлеровыми, их необходимо трансформировать в узлы регулярной сетки, что неизбежно влечет их сглаживание. В областях расходящихся потоков количество трассеров может быть слишком мало для получения адекватных оценок в регулярных узлах. Однако в условиях достаточного количества трассеров (когда, условно говоря, их количество на единицу площади превышает плотность узлов сетки) лагранжев метод эффективен для выявления тонких структур в полях возраста, изотопного состава и прочих, которые не могут быть получены в рамках эйлерова метода. Таким

образом, лагранжев подход, очевидно, более подходит для детального описания полей в ограниченных областях, для региональных исследований, где важны детали исследуемых полей.

Литература

- Bates J.R., McDonald A.** Multiply-upstream, Semi-Lagrangian advective schemes: Analysis and application to a multi-level primitive equation model // *Mon. Weather Rev.*, 1982, vol. 110, p. 1831–1842.
- Bermejo R.** On the equivalence of Semi-Lagrangian schemes and Particle-in-Cell finite element methods // *Mon. Weather Rev.*, 1990, vol. 118, p. 979–987.
- Calov R., Savvin A., Greve R. et al.** Simulation of the Antarctic ice sheet with a three-dimensional polythermal ice-sheet model in support of the EPICA project // *Ann. Glaciol.*, 1998, vol. 27, p. 201–206.
- Clarke G.K.C., Marshall S.J.** Isotopic balance of the Greenland ice sheet: modelled concentrations of water isotopes from 30,000 BP to present // *Quatern. Sci. Rev.*, 2002, vol. 21, p. 419–430.
- Clarke G.K.C., Lhomme N., Marshall S.J.** Tracer transport in the Greenland ice sheet: three-dimensional isotopic stratigraphy // *Quatern. Sci. Rev.*, 2005, vol. 21, p. 419–430.
- EPICA community members.** Eight glacial cycles from an Antarctic ice core // *Nature*, 2004, vol. 429, p. 623–628.
- EPICA community members.** One-to-one interhemispheric coupling of polar climate variability during the last glacial // *Nature*, 2006, vol. 444, p. 195–198.
- Fjørtoft R.** On a numerical method of integrating the barotropic vorticity equation // *Tellus*, 1952, vol. 4, p. 179–194.
- Harlow F.H.** The Particle-in-Cell computing method for fluid dynamics // *Methods of Comput. Phys.*, 1964, vol. 3, p. 319–343.
- Hockney R.W., Eastwood J.W.** Computer simulations using particles. Bristol and Philadelphia, Inst. Phys. Publ., 1992, 540 p.
- Hutter K.** Theoretical Glaciology: material science of ice and the mechanics of glaciers and ice sheets. Dordrecht etc., D. Reidel, 1983, 510 p.
- Huybrechts P.** The present evolution of the Greenland ice sheet: an assessment by modelling // *Global and Planetary Change*, 1994, vol. 9, p. 39–51.
- Huybrechts P.** Sea-level changes at the LGM from ice-dynamic reconstructions of the Greenland and Antarctic ice sheets during the glacial cycles // *Quatern. Sci. Rev.*, 2002, vol. 21, p. 203–231.
- Huybrechts P., de Wolde J.** The dynamic response of the Greenland and Antarctic ice sheets to Multiple-Century Climatic Warming // *J. Climate*, 1999, vol. 12, p. 2169–2188.
- Huybrechts P., Rybak O.** A 3D model reconstruction of the Antarctic ice sheet during the last 8 glacial cycles // *Polar Regions and Quaternary Climate: Abstr. ESF Conf. Acquafredda di Maratea, Italy*, 2005, p. 24–27.
- Imbrie J.Z., Hays J.D., Martinson D.G. et al.** The orbital theory of Pleistocene climate: support from a revised chronology of the marine $\delta^{18}\text{O}$ record // *Milankovich and Climate* / Ed. A. Berger et al. Dordrecht, D. Reidel, 1984, p. 269–305.
- Krishnamurti T.N.** Numerical integration of primitive equations by a Quasi-Lagrangian advective scheme // *J. Appl. Meteorology*, 1962, vol. 1, p. 508–521.

- Lhomme N., Clarke G.K.C., Marshall S.J.** Tracer transport in the Greenland ice sheet: constraints on ice cores and glacial history // *Quatern. Res.*, 2005a, vol. 24, p. 173–194.
- Lhomme N., Clarke G.K.C., Ritz C.** Global budget of water isotopes inferred from polar ice sheets // *Geophys. Res. Lett.*, 2005b, vol. 32, L29502, doi: 10.1029/2005GL023774.
- Lliboutry L.** *Very Slow Flow of Solids. Basics of Modeling in Geodynamics and Glaciology.* Dordrecht, Martinus Nijhoff Publ., 1987, 510 p.
- Lorius C., Jouzel J., Ritz C. et al.** A 150,000-year climatic record from Antarctic ice // *Nature*, 1985, vol. 316, p. 591–596.
- Paterson W.S.B.** *The physics of glaciers: 3rd ed.* Oxford, N.Y., Tokyo, Elsevier, 1994, 480 p.
- Petit J.R., Jouzel J., Raynaud D. et al.** Climate and atmospheric history of the past 420,000 years from the Vostok ice core, Antarctica // *Nature*, 1999, vol. 399, p. 429–436.
- Robin G. de Q.** Ice cores and climatic change // *Philos. Trans. Roy. Soc. London, B*, 1977, vol. 280, p. 143–168.
- Rybak O., Huybrechts P.** A comparison of Eulerian and Lagrangian methods for dating in numerical ice-sheet models // *Ann. Glaciol.*, 2003, vol. 37, p. 150–158.
- Sawyer J.S.** A Semi-Lagrangian method of solving the vorticity advection equation // *Tellus*, 1963, vol. 15, p. 336–342.
- Staniforth A., Côte J.** Semi-Lagrangian integration schemes for atmospheric models – A review // *Mon. Weather Rev.*, 1991, vol. 119, p. 2206–2223.
- Tarasov L., Peltier W.R.** Greenland glacial history, borehole constraints, and Eemian extent // *J. Geophys. Res.*, 2003, vol. 108 (B3), 2143, doi: 1029/2001JB001731.
- Watanabe O., Jouzel J., Johnsen S.J. et al.** Homogenous climate variability across East Antarctica over the past three glacial cycles // *Nature*, 2003, vol. 422, p. 509–512.
- Welander P.** Studies on the general development of motion in a two-dimensional, ideal fluid // *Tellus*, 1955, vol. 7, p. 141–156.
- Wiin-Nielsen A.** On the application of trajectory methods in numerical forecasting // *Tellus*, 1959, vol. 11, p. 180–196.

*Поступила в редакцию
11 декабря 2006 г.*