Криосфера Земли, 1998, т. II, № 2, с. 43—47

УДК 55.343

ОСОБЕННОСТИ ЧИСЛЕННОЙ (КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОЙ) РЕАЛИЗАЦИИ ОДНОМЕРНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТЕРМОКАРСТОВОГО ПРОЦЕССА

А. С. Тетельбаум, Г. М. Фельдман, Н. И. Шендер

Институт мерзлотоведения им. акад. П. И. Мельникова СО РАН, г. Якутск

Разработана специальная методика перестройки пространственной сетки для конечно-разностной схемы эволюционного решения одномерной задачи Стефана, позволяющая воспроизводить последовательные этапы термокарста — выход на периодически установившийся режим для нетронутого массива; удаление напочвенного покрова и залитие (в общем случае) оголенной поверхности слоем воды; постепенное с течением лет увеличение глубины сезонного либо многолетнего протаивания (возможный переход первого во второе), сопровождающееся просадкой оттаявшего грунта и ростом глубины водоема.

Для учета деформаций просевшего грунта введена виртуальная сетка, жестко связанная не с пространством, а с заполняющим его веществом (грунтом). До подсчета просадок за очередной модельный год она совпадает с постоянной сеткой (на которой идет счет), а после подсчета деформируется вместе с грунтом, причем, сформировавшееся на этот момент в ее узлах температурное поле сохраняется и „проецируется“ (т. е. специальным образом пересчитывается) на постоянную сетку. Предложенная методика позволяет учесть сколь угодно большие просадки вплоть до исчезновения прослойки чистого льда.

Термокарст, просадка, задача Стефана, конечно-разностная схема, пространственная сетка

PECULIARITIES OF THE NUMERICAL (FINITE-DIFFERENCE) DEVELOPMENT OF THE ONE-DIMENSIONAL MATHEMATICAL THERMOKARST MODEL

A. S. Tetelbaum, G. M. Feldman, N. I. Shender

Melnikov Permafrost Institute SD RAS, Yakutsk

A special method has been devised for the reconstruction of a spatial grid for the finite-difference scheme of the evolutionary solution of one-dimensional Stephan problem. The method allows us to simulate consecutive thermokarst stages: transfer to the periodically stabilized temperature regime for undisturbed massif; removal of the soil cover and covering (in a general case) of the exposed surface by a water layer; a gradual year-to-year increase in the depth of seasonal or perennial thaw (possible transition from seasonal to perennial thaw) and thaw-associated subsidence and increase in the depth of a water basin.

A virtual grid rigidly connected not with the space but its filling material (ground) has been introduced to take account of the deformation of the subsided ground. Prior to calculations of the subsidence of the due simulation year the virtual grid coincides with the fixed grid (on which calculations are made) and it deforms together with the ground after calculations. The temperature field formed at the grid nodes by that time is retained and „projected" (i. e. recalculated in a special way) to the fixed grid. This method makes it possible to take into account subsidence of any extent, up to disappearance of a pure ice interlayer.

Thermokarst, subsidence, Stephan problem, finite-defference scheme, spatial grid

---

Рассматривается одномерная имитационная математическая модель техногенного термокарста, вызванного удалением напочвенного покрова (НП) с одновременным (в общем случае) обводнением территории.

Первый этап моделирования — отыскание для инженерно-геологического разреза и климатических условий данной метеостанции по методике, изложенной в [*Шендер и др., 1990*], периодически установившегося температурного поля на начало теплого сезона года. Граничная температура при этом принимается равной

$$t_{bn}(\tau) = \begin{cases} \dfrac{\pi\Omega_s^c}{2\tau_s}\sin\dfrac{\pi\tau}{\tau_s} \text{ при } 0 < \tau \le \tau_s \\ \dfrac{\pi\Omega_w^c}{2\tau_w}\sin\dfrac{\pi(\tau-\tau_s)}{\tau_w} \text{ при } \tau_s < \tau \le \tau_y \end{cases}, \quad (1)$$

где τ — время, час, τ_s и τ_w — длительности соответственно летнего и зимнего периодов, $\tau_s + \tau_w = \tau_y = 8760$ час — продолжительность года, отсчет времени ведется от момента начала летнего периода; Ω_s^c и Ω_w^c — расчетные (с учетом теплообмена воздуха с грунтом или снегом) значения сумм летних и зимних градусочасов на дневной поверхности. Специальным образом [*Фельдман и др., 1988*] задается также динамика накопления снежного покрова $h_{sn}(\tau)$ и зависимость плотности снега от его мощности.

Модель предполагает, что льдонасыщенные горизонты лежат заведомо ниже подошвы деятельного слоя (ДС), т. е. в естественных условиях осадка грунта не происходит. Затем в конце зимы „снимается" НП и оголенный грунт „заливается" слоем воды заданной, в частности, равной нулю, глубины $h_{w,st}$ и с нулевой начальной температурой (в машинной программе все эти действия выполняются автоматически). Таковы начальные условия второго этапа — воспроизведения собственно термокарстового процесса. Далее (в общем случае) скачкообразно изменяются значения $h_{sn}^{\max}$ максимальной за зиму мощности снежного покрова, а также входящие в формулу (1) величины Ω_s^c и Ω_w^c (их приращения $\Delta\Omega_s^c$ и $\Delta\Omega_w^c$) заданы соответственно изменению условий теплообмена на дневной поверхности в связи с появлением водоема. Граница сезонного протаивания с каждым годом все глубже проникает в льдонасыщенные слои, последние подвергаются просадке, а находившаяся в них влага отжимается на поверхность, увеличивая тем самым водный слой.

Теплообменные процессы в системе „водоем—грунт" моделируются задачей Стефана (ЗС) только в зимний период, поскольку перемешиванием воды, изолированной от ветра льдом, можно пренебречь. Для летнего же периода, когда температура t_{bot} придонных слоев воды существенно зависит от интенсивности перемешивания водных масс, модель дополнена элементами эмпирики. Верхняя граница области решения ЗС помещается на дно озера; вводятся два параметра: η — коэффициент перемешивания, зависящий от глубины водоема h_w и среднелетней скорости ветра [*Фельдман, 1984*], и $\tau_т$ — продолжительность периода таяния льда, являющаяся функцией мощности ледяного покрова $h_л = 1{,}09 \min(\xi, h_w)$, где ξ — глубина максимального промерзания разреза, отсчитываемая от поверхности озера. В течение всего интервала τ_s принимаем $t_{bot} = 0$ °C, в оставшуюся часть лета $t_{bot} = \eta t_{bn}(\tau)$. Для конкретных географических точек $\eta(h_w)$ заданы.

В исходных данных указываются мощности h_i ($i = 1, ..., n_{lr}$) каждого слоя просчитываемого n_{lr}-слойного разреза в допросадочном состоянии, относительная осадка δ_i, а также весовая влажность w_i^j, доля незамерзшей воды $w_{nf,i}^j$, плотность скелета $\gamma_{sk,i}^j$, коэффициент теплопроводности $\lambda_{m,i}^j$, $\lambda_{f,i}^j$ и объемная теплоемкость $C_{m,i}^j$, $C_{f,i}^j$, индекс „m" соответствует талому, „f" — мерзлому грунту, $j = 1$ до $j = 2$ — послепросадочному состоянию. Для 1-го слоя, каковым является НП, послепросадочные значения свойств игнорируются.

Предполагается, что если слой, первоначально принадлежащий вечномерзлым горизонтам, впервые протаял за лето на глубину $h_{i,m}$ ($0 \le h_{i,m} \le h_i$) от своей верхней границы, то в момент окончания лета нижняя, не затронутая таянием его часть остается неизменной, верхняя же равномерно сжимается в $(1-\delta_i)$ раз, т. е. утоньшается на величину $h_{i,m}\delta_i$, изменяя скачком значения своих свойств с до- на послепросадочные, причем температура в каждой физической точке деформируемого грунта сохраняется. Одновременно глубина слоя воды возрастает на $\Delta h_w = 0{,}92 \cdot k_{сохр} \cdot h_{i,m}\,\delta_i$, коэффициент $k_{сохр}$ ($0 \le \le k_{сохр} \le 1$) характеризует степень сохранения в термокарстовом понижении поступившей на поверхность воды.

Кратко рассмотрим алгоритм, реализующий эту модель, и соответствующую ему методику преобразования пространственной сетки, на которой решается ЗС.

Предположим, к концу g-го года (здесь и ниже за начало года принято начало зимнего периода) фронт протаивания с учетом просадок за этот и предыдущий годы имеет глубину l_g (отсчет ведется от дна водоема) и лежит в r_g-м слое. Глубина водоема $h_{w,g} = h_{1,cur}$, мощности слоев со 2-го (бывший слой сезонного протаивания) по $(r_g - 1)$-й и с $(r_g + 1)$-го по n_{lr}-й соответственно равны

$$h_{i,cur} = (1 - \delta_i)\, h_i = h_i^{(2)},\ i = 2, ..., r_g - 1;$$

$$h_{i,cur} = h_i,\ i = r_g + 1, ..., n_{lr}.$$

Глубина подошвы i-го слоя

$$G_i = \sum_{s=2}^{i} h_{i,cur},\ i = 2, ..., n_{lr}, \qquad (2)$$

r_g-й слой состоит из просевшей и непросевшей частей с мощностями соответственно $h_{r_g}' = l_g - G_{r_g - 1} = (h_{r_g} - h_{r_g}'')(1 - \delta_{r_g})$ и $h_{r_g}'' = G_{r_g} - l_g$. Очевидно, $h_{r_g,cur} = h_{r_g}' + h_{r_g}''$. Ниже отметки l_g свойства грунта имеют допросадочные, выше — послепросадочные значения.

Пусть на конец $(g+1)$-го года глубина максимального протаивания без учета просадок за этот год равна l_{g+1} и фронт лежит в r_{g+1}-м слое: $l_{g+1} \ge l_g$, $r_{g+1} \ge r_g$. ЭВМ вычисляет просадку (уменьшение мощности) каждого слоя: $\Delta S_i = [\min(l_{g+1}, G_i) - \max(l_g, G_i - 1)] \cdot (1 - \delta_i)$, $i = r_g, ..., r_{g+1}$ и суммарную просадку разреза:

$$D = \sum_{i=r_g}^{r_{g+1}} \Delta S_i . \quad (3)$$

Любая частичка вещества, т. е. физическая точка с координатой z, принадлежащая i-му слою ($l_g \le z \le 1_{g+1}$, $r_g \le i \le r_{g+1}$), уменьшает свою координату (поднимается вверх), сохраняя температуру, на отрезок

$$\Delta z = \sum_{k=r_g}^{i-1} \Delta S_k + [z - \max(l_g, G_{i-1})]\cdot(1 - \delta_i). \quad (4)$$

Все точки, лежащие ниже горизонта $l_{g+1}(z \ge l_{g+1})$, смещаются вверх на

$$\Delta z = S. \quad (5)$$

Рассчитываются новая глубина водоема и новые текущие значения мощностей слоев

$$h_{w,(g+1)} = h_{w,g} + 0{,}92 \cdot k_{\text{сохр}} \cdot S, \quad (6)$$

$$h_{i,cur} := h_{i,cur} - \Delta S_i, \; i = r_g, ..., r_{g+1} \quad (7)$$

и по формуле (2) координаты подошвы каждого слоя. Затем граница протаивания приводится к новой геометрии разреза

$$l_{g+1} := 1_{g+1} - S. \quad (8)$$

Наконец, всей области (l_g, l_{g+1}) присваиваются послепросадочные значения свойств.

На протяжении всего счета сетка имеет два участка (будем их называть „математическими" слоями (МС), характеризующиеся тем, что в пределах каждого участка знаменатель геометрической прогрессии q_i ($i = 1, 2$), в которой увеличиваются размеры блоков по мере роста их номера, постоянен. Первый МС — это либо НП на стадии выхода на периодически установившийся режим, либо водоем на каждом этапе решения собственно термокарстовой задачи, причем во втором случае $q_1 = 1$. За начало координат ($z = 0$) примем начало 1-го МС. Нумеровать узлы сетки (центры блоков) будем сверху вниз, начиная с 1-го узла 1-го МС (основная нумерация); введем также вспомогательную координатную систему с началом на дне водоема и соответствующую ей нумерацию блоков и узлов, начиная с 1-го узла 2-го МС (собственно грунта). При любом изменении глубины водоема, в том числе и в момент его возникновения (после удаления НП), количество узлов и размер блока 1-го МС определяются по формулам

$$n_{bl,1} = [n_{\max,1}(1 - \exp(-\alpha_1 h_{lr,1})) + 0{,}5], \quad (9)$$

$$h_{bl,1} = h_{lr,1}/n_{bl,1} \text{ при } n_{bl,1} > 0, \quad (10)$$

где $h_{lr,1} = h_{w,cur}$ — текущее значение глубины, $n_{\max,1}$ — зарезервированное максимально возможное количество блоков водной (изображающей озеро) части сетки, α_1 определяет степень выполаживания кривой $n_{bl,1} = f(h_{lr,1})$, $[\alpha]$ — целая часть числа α.

Координата j-го узла во вспомогательной системе координат равна

$$z_i = (j - n_{bl,1} - 0{,}5) \cdot h_{bll,1}, \; j = 1, ..., n_{bl,1}. \quad (11)$$

Из (9) следует, что при глубинах, меньших некоторого порога $h_{\text{порог}} = \ln(1 - 0{,}5/n_{\max,1})/\alpha_1$, слой воды игнорируется.

Такой механизм ограничивает число блоков водной части пределом $n_{\max,1}$ и предотвращает безудержный рост общего количества блоков. На мощность же водного слоя ограничений нет. Введение $h_{\text{порог}}$ исключает деление на пренебрежимо малую величину, если глубина водоема является таковой. Таким образом, при каждом увеличении водоема блоки на соответствующем ему участке сетки растягиваются, а их общее число не убывает. Экспоненциальный вид функции $n_{bl,1} = f(h_{lr,1})$ предпочтительнее любого другого, так как он в заметной мере стабилизирует относительную погрешность счета. Отсутствие блоков с усредненными значениями свойств на стыке водоема (или НП) с грунтом предотвращает появление соответствующих погрешностей.

Будем сопровождать переменные $n_{bl,1}$, $h_{lr,1}$, z_i индексами g и $(g + 1)$, относя их тем самым к концу (после преобразования геометрии разреза и сетки) соответственно g-го и $(g + 1)$-го годов. Вслед за созданием новой водной части сетки вычисляется температурное поле в ее узлах на начало $(g + 2)$-го года (новая сетка). Постулируется, что в момент осадки ранее существовавший „столбик" воды вместе со своим полем неподвижен, а добавка воды располагается над ним. В той части сетки, которая относится к вновь появившейся воде, т. е. в узлах с координатами (во вспомогательной системе; ниже речь будет идти только о ней) более отрицательными, чем у 1-го узла сетки предыдущего года, назначается температура +0,1 °С. Для прочих узлов сетки $(g + 1)$-го года температурное поле определяется „проецированием" на эту сетку температур в узлах сетки g-го года. „Проецирование" состоит в линейной интерполяции температур в той паре узлов сетки, между которыми лежит данный узел новой сетки:

$$\left.\begin{aligned} & T_j := 0{,}1 \forall j \in \{1, ..., n_{bl,1,(g+1)}\} : z_{j,(g+1)} < z_{1,g}; \\ & T_j := T_r + (T_{r-1} - T_r)\,(z_{j,(g+1)} - z_{r,g})/ \\ & \quad /(z_{(r-1),g} - z_{r,g}); \\ & \forall j \in \{1, ..., n_{bl,1,(g+1)}\} : z_{j,(g+1)} \ge z_{1,g}, \\ & \forall r : z_{r,g} > z_{j,(g+1)},\; z_{(r-1),g} \le z_{j,(g+1)}. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Здесь T_j — температура в j-м узле в момент подсчета просадок (разумеется, до тех пор, пока не будут выполнены все присвоения, значения правых частей операторов, т. е. температуры, отнесенные к узлам старой сетки, сохраняются).

Перейдем к методике преобразования той части сетки, которая соответствует собственно грунту. Она постоянна, т. е. координаты ее узлов, число $n_{\mathrm{mat}\,2}$ и размеры блоков неизменны. При каждой осадке определенный участок среды сжимается, а физические точки его и всех нижележащих горизонтов вместе со своими температурами поднимаются. Для отражения в численной схеме такой механической деформации грунта введена виртуальная (кажущаяся) сетка, жестко связанная не с пространством, а с заполняющим его веществом. Перед каждым очередным подсчетом осадки эта сетка совпадает с постоянной сеткой (той ее частью, которая отведена грунту). В результате же осадки все узлы виртуальной сетки, лежащие ниже отметки l_g, перемещаются вверх на расстояние (выражения (4) и (5)) подъема соответствующих точек грунта. Поле, оставаясь неизменным в ее узлах, естественно оказывается деформированным в пространстве по сравнению с исходным. Затем оно „проецируется" на постоянную сетку, т. е. в каждом узле постоянной сетки температура рассчитывается линейной интерполяцией температур тех узлов виртуальной сетки, между которыми он находится. В узлах постоянной сетки, лежащих ниже последнего узла виртуальной сетки, температура принимается такой же, как и в нем.

$$\left.\begin{array}{c} T_j := T_{r-1} + (T_r - T_{r-1})\,(z_j - \tilde{z}_{r-1})/ \\ /(\tilde{z}_r - \tilde{z}_{r-1})\ \forall j \in \{1, \ldots, n_{mat\,2}\} : z_j > l_g, \\ z_j < \tilde{z}_{n_{mat\,2}} = z_{n_{mat\,2}} - S; \\ T_j = T_{n_{mat\,2}}\ \forall j \in \{1, \ldots, n_{mat\,2}\} : z_j \geq \tilde{z}_{n_{mat\,2}}, \\ \forall r : \tilde{z}_r > z_j,\ \tilde{z}_{r-1} \leq z_j, \end{array}\right\} \quad (13)$$

где $\tilde{z}_r$ — координата r-го виртуального узла (нумерация вспомогательная).

Рассмотренный подход к построению сетки обладает тем преимуществом, что при любых осадках размеры рабочих блоков остаются такими, какими они были выбраны из соображений точности и быстродействия счета и никогда не станут непозволительно малыми. В частности, эта методика позволяет воспроизводить полное „схлопывание" слоя при $\delta_i = 1$. При этом несколько виртуальных узлов совпадают друг с другом.

В процессе счета на каждом этапе преобразования сетки сначала перестраивается ее грунтовая часть по методике (2), (8) и (13) с одновременным расчетом новой геометрии разреза, общей осадки грунта (3) и новой глубины водоема (6). Затем трансформируется водная часть по формулам (9), (10)—(12). Далее координаты всех узлов приводятся к единой, основной координатной системе. Для грунтовой части сетки это делается по формуле $z_j := z_j + \Delta z$, где Δz равно $h_{w,st} - h_1$ — либо $0{,}92k_{\text{сохр}}$ соответственно в момент снятия НП или в начале любого другого лета, h_1 — мощность НП (координаты узлов в правой части записаны в основной системе применительно к завершившемуся году).

Для водной части $z_j := z_j + h_{w,(g+1)}$ (стоящие справа координаты узлов вычисляются по формуле (11)).

Суммарное количество блоков в конце каждого года (после коррекции сетки) равно $n_{bl,(g+1)} = n_{bl,1,(g+1)} + n_{mat\,2}$. Второе слагаемое правой части постоянно, а первое в общем случае от года к году увеличивается (вернее, является неубывающей функцией номера года). Это требует перенумерации узлов и блоков всей сетки (вода плюс грунт) — приведения их к основной нумерации (так, чтобы номер 1 оставался за верхним блоком водоема). С точки зрения ЭВМ перенумерация сводится к сдвигу на $n_{bl,1,(g+1)} - n_{bl,1,g}$ элементов содержимого массивов, где хранятся координаты узлов, размеры и температуры блоков, различные вспомогательные переменные, описывающие состояние узлов.

Присвоение значений теплофизических свойств блокам сетки осуществляется по следующему алгоритму. Свойства каждого блока определяются как средневзвешенные свойств физических слоев, вмещающих этот блок. Фактически такое усреднение делается только для блоков, принадлежащих двум смежным слоям и более (последняя ситуация теоретически не исключена и может оказаться типичной при решении термокарстовой задачи со значениями δ_i, близкими к единице, когда в результате осадки слои в несколько раз утоньшаются). Если блок полностью находится внутри одного физического слоя, его свойства совпадают со свойствами последнего.

Для блоков, целиком лежащих выше границы l_{g+1} (после коррекции геометрии) максимального протаивания за $(g+1)$-й год, берутся послепросадочные значения свойств, ниже — допросадочные. Для блока, через который проходит эта граница, совершается еще одно усреднение — по степени принадлежности блока неподвергшейся и подвергшейся осадке области. Вводя весовые коэффициенты, характеризующие такую принадлежность,

$$v_i^{(1)} = \min\left(1, \max\left(0, \sum_{s=1}^{i} h_{tl,s} - l_{g+1}\right)/h_{bl,i}\right),$$

$v_i^{(2)} = 1 - v_i^{(1)}$, можно для r-го свойства i-го блока, через который проходят подошвы m-го, $(m+1)$-го,..., $(m+k)$-го слоев, записать

$$P_{i,r} = \sum_{j=1}^{2} \frac{\sum\limits_{t=m+1}^{m+k} h_{t,cur} \cdot \widetilde{P}_{t\,r}^{(j)} + \left(\sum\limits_{t=1}^{m} h_{t,cur} - \sum\limits_{s=1}^{i-1} h_{bl,s} \right) \cdot \widetilde{P}_{m,r}^{(j)}}{h_{bl,i}} \cdot v_i^{(j)} + \sum_{j=1}^{2} \frac{\left(\sum\limits_{s=1}^{i} h_{bl,s} - \sum\limits_{t=1}^{m+k} h_{t,cur} \right) \cdot \widetilde{P}_{m+k+1,r}^{(j)}}{h_{bl,i}} \cdot v_i^{(j)},$$

где $\widetilde{P}_{i,r}^{(j)}$ — величина того же свойства t-го слоя.

Решение самой ЗС выполняется по неявной двухслойной схеме [*Самарский, Николаев, 1978*] в сочетании со сглаживанием разрывных теплофизических параметров и специальными механизмами ускорения и обеспечения сходимости итерационного процесса.

Литература

Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М., Наука, 1978, 592 с.

Фельдман Г. М. Термокарст и вечная мерзлота. Новосибирск, Наука, 1984, 256 с.

Фельдман Г. М., Тетельбаум А. С., Шендер Н. И., Гаврильев Р. И. Пособие по прогнозу температурного режима грунтов Якутии. Якутск, Ин-т мерзлотоведения СО АН СССР, 1988, 240 с.

Шендер Н. И., Тетельбаум А. С., Фельдман Г. М. Алгоритм ускоренного поиска периодически установившегося режима при решении задачи Стефана без начальных условий // Геокриологические исследования на севере Западной Сибири. Новосибирск, Наука, 1990, с. 105—110.

Поступила в редакцию
12 декабря 1997 г.