Криосфера Земли, 1999, т. III, № 1, с. 38—42

УДК 55.343

ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ОДНОМЕРНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТЕМПЕРАТУРНОГО РЕЖИМА ЛОЖА ВОДОХРАНИЛИЩА С РЕГУЛИРУЕМЫМ УРОВНЕМ ВОДНОГО ЗЕРКАЛА

А.С. Тетельбаум, Н.И. Шендер, И.П. Константинов, Б.А. Оловин

Институт мерзлотоведения им. акад. П. И. Мельникова СО РАН, 677010, Якутск-18, Россия

В развитие одномерной математической модели термокарста разработана модель температурного режима ложа водохранилища, уровень которого на протяжении модельного года может по заданному закону как увеличиваться, так и уменьшаться вплоть до полной сработки на мелководьях. В частности, возможна ситуация (также предусмотренная моделью), когда для некоторых участков водохранилища в процессе зимней его сработки удаляется вся незамерзшая (подледная) толща воды; образовавшийся к этому моменту лед ложится на дно и дальнейшая сработка, независимо от закона регулирования уровня водохранилища, в данной точке уже не происходит до окончания зимнего периода.

Поскольку глубина водоема становится немонотонной функцией времени, для численной реализации модели существенно усложнена методика перестройки пространственной сетки решения тепловой (стефановской) задачи, разработанная применительно к модели-прототипу. Приняты специальные меры для минимизации погрешности „проецирования“ поля виртуальной сетки на постоянную сетку и повышения точности моделирования — усовершенствованная методика позволяет с равным успехом вести счет как для неглубоких (до 1,5—2 м) термокарстовых озер, так и для глубоких (50—60 м) водохранилищ.

Водохранилище, задача Стефана, конечно-разностная схема, пространственная сетка, теплообмен

NUMERICAL REALIZATION OF THE ONE-DIMENSIONAL MATHEMATICAL TEMPERATURE REGIME MODEL FOR WATER RESERVOIR BED WITH REGULATED LEVEL OF WATER TABLE

A. S. Tetelbaum, N. I. Shender, I. P. Konstantinov, B. A. Olovin

Melnikov Permafrost Institute SD RAS, 677010, Yakutsk-18, Russia

A temperature regime model for water reservoir bed has been worked out in the development of one-dimensional thermokarst model. The level of water reservoir can both rise and drop according to a given principle during simulation year until its complete decrease in a shallow water. A situation is possible in particular (also involved in the model) when the whole unfrozen (under ice) mass of water is removed from some portions of water reservoir during decrease in its winter water level. The ice, which had formed by that moment, falls at the bottom and there is no any further decrease in water level until the end of winter period despite the principle of regulation of water reservoir level.

As far as the depth of water reservoir becomes a nonmonotonous function of time, a method of reconstruction of spatial grid for solving thermal (Stephan) problem, developed as applied to a model-prototype, has been considerably complicated. Special measures were undertaken to minimize the numerical errors of „projecting“ of the virtual grid field to the fixed grid and to increase simulation accuracy. The improved method makes it possible to conduct successful calculations both for shallow (up to 1,5—2 m) thermokarst lakes and for deep (50—60 m) water reservoir.

Water reservoir, Stephan problem, finite-difference scheme, spatial grid, heat exchange

Модель разработана в развитие одномерной модели термокарстового процесса [*Тетельбаум и др., 1998*]. Ее существенное отличие от последней — возможность воспроизводить немонотонные изменения (не только рост, но и уменьшение) уровня водоема, вплоть до полной сработки слоя воды на мелководьях, причем эти изменения могут происходить на протяжении всего модельного года, а не только в конце летнего периода. Кроме того, счет с равным успехом может вестись и для неглубоких (до 1,5—2 м) термокарстовых озер, и для водохранилищ (до 50—60 м). Такая модель потребовала создания новой методики перестройки пространственной сетки, на которой методом конечных разностей решается нелинейное уравнение теплопроводности (задача Стефана). Эта методика, коренным образом отличающаяся от таковой для предшествующей модели, и составляет основное содержание статьи.

Для простоты изложение ведется в предположении отсутствия просадок в горизонтах, лежащих под дном водохранилища, первоначально находящихся в вечномерзлом состоянии и протаивающих по мере продвижения вниз фронта сезонного или многолетнего оттаивания. Это отсутствие устанавливается заданием для каждого физического слоя исследуемого инженерно-геологического разреза, во-первых, идентичных значений его теплофизических свойств в до- и послепросадочном состояниях; во-вторых, равного нулю коэффициента просадки δ. О возможном усложнении процесса перестройки сетки при учете просадок можно составить представление из процитированной статьи.

Как и в модели-прототипе, процесс моделирования начинается с отыскания для нетронутого массива (т. е. до залития поверхности водой) периодически установившегося температурного поля (ПУТП). Далее в начале летнего периода удаляется напочвенный покров (НП) и мгновенно образуется слой воды заданной мощности $h_{w,st\,sum}$. В этот же момент надлежащим заданием исходных данных скачком изменяются теплофизические свойства слоев разреза соответственно возрастанию влажности его верхних горизонтов после залития, а также климатические кривые, продолжительности зимнего τ_w и летнего τ_s периодов, законы снегонакопления, отражая фактическое удлинение сезона с положительными граничными температурами из-за запаздывания момента начала образования ледяного покрова по отношению к моменту перехода средней многолетней среднесуточной температуры воздуха через 0 °С, помещение летних граничных условий (ГУ) на дно (см. ниже) и растворение в воде снега, выпавшего на еще незамерзшую поверхность водного зеркала. В реальных вариантах счета ГУ, мощности и плотности снега в целях обеспечения большей адекватности модели моделируемым тепловым процессам задавались не аналитическими, а табличными функциями временной координаты τ.

Задан также закон изменения уровня водохранилища $h_w(\tau)$, причем в рамках модели летом $h_w(\tau)$ может как понижаться, так и повышаться, а зимой только понижаться или оставаться неизменным (что, кстати, отражает реальный гидрологический режим водохранилищ), т. е. при $0 \le \tau \le \tau_w$: $h_w(\tau)$ — монотонно невозрастающая функция, а при $\tau_w < \tau < \tau_y$ такое требование на $h_w(\tau)$ не налагается. Здесь $\tau_y = \tau_w + \tau_s = 8760$ час — длительность года, отсчет времени ведется от начала зимы. Для простоты и за неимением соответствующей информации принимается отсутствие межгодовой изменчивости $h_w(\tau)$, равно как и всех поверхностных условий (климатических кривых и закона снегонакопления), т. е. все являющиеся функциями времени внешние условия задачи из года в год повторяются.

Пусть $\Delta\tau$ — шаг временной сетки конечно-разностной схемы (КРС), алгоритм предполагает, что $\Delta\tau$ неизменно на протяжении всего счета: $\Delta\tau = \tau_y/n_y$, где n_y — число временных слоев, соответствующих одному модельному году. Количества временных слоев для лета и зимы с учетом возможной некратности периодов τ_s и τ_w шагу $\Delta\tau$ равны, соответственно, $n_s = [\tau_s/\Delta\tau]$, $n_w = n_y - n_s$, квадратными скобками обозначена операция взятия целой части.

С точки зрения структуры модели необходимо знать $h_w(\tau)$ только в зимний период. Поэтому для каждого (j-го) зимнего временного шага КРС машине задается соответствующее табличное значение (полученное приведением функции $h_w(\tau)$ к временной сетке КРС) уменьшения (точнее, неувеличения) $\Delta h_{w,j}$ уровня водохранилища: $\Delta h_{w,j} = -(h_{w,j} - h_{w,j-1})$, где $h_{w,j}$ — глубина водохранилища на этом шаге; $j = 1, \ldots, n_w$. Под $h_{w,0}$ понимается величина этой глубины на начало зимы (конец лета).

В летний период ГУ помещаются на дно, т. е. верхней границей области решения стефановской задачи полагается верхняя граница 1-го блока собственно грунтового участка сетки, причем в отличие от модели, описанной в цитируемой статье, это выполняется не эквивалентным изменением теплофизических свойств воды при формальном сохранении водного участка сетки, а соответствующим преобразованием самой сетки (подробности ниже), т. е. проделывается подлинное перемещение ГУ на дно. Поэтому отпадает надобность в фигурирующих в прежней модели двух параметрах — коэффициенте перемешивания и интервале таяния льда; вернее, эти параметры используются, но только на стадии подготовки исходных данных — граничных температур, задаваемых таблично индивидуально для каждого летнего временного шага с учетом фактической глубины водохранилища на этом шаге и среднелетней скорости ветра, а для начального этапа летнего периода еще и с учетом времени схода льда на этом этапе. Такое усовершенствование модели значительно повышает точность счета для глубоких (десятки метров) водоемов.

В зимний период ГУ возвращаются на поверхность водохранилища и решается задача Стефана в области с перемещающейся на каждом временном шаге верхней границей.

Модель воспроизводит и такие ситуации, когда для достаточно мелких (главным образом прибрежных) участков водохранилища в процессе зимней его сработки удаляется вся незамерзшая (подледная) толща воды, образовавшийся к этому моменту лед ложится на грунт и дальнейшая сработка водохранилища в данной точке уже невозможна, какими бы не были значения $\Delta h_{w,j}$. Осуществляется это по такому алгоритму. Пусть на начало j-го зимнего временного шага фактическая мощность слоя воды (вместе со льдом) равна $\tilde{h}_{w,j-1}$. После выполнения шага должной локализацией фазовых границ находится глубина промерзания $z_{ph,j}$, отсчитываемая от текущей поверхности зеркала водохранилища, т. е. либо толщина льда при $z_{ph,j} \le \tilde{h}_{w,j-1}$, либо мощность льда плюс глубина промерзшей под ним прослойки грунта, если $z_{ph,j} > \tilde{h}_{w,j-1}$ (увеличение объема льда на 9 % по сравнению с объемом воды численная схема не учитывает). Пусть заданная для j-го шага убавка уровня водоема равна $\Delta h_{w,j}$. Согласно алгоритму фактическая убавка уровня берется равной

$$\tilde{\Delta} h_{w,j} = \max\left(0, \min\left(\Delta h_{w,j}, \tilde{h}_{w,j-1} - z_{ph,j}\right)\right), \quad (1)$$

при этом фактическая мощность слоя воды на начало $(j + 1)$-го шага составит

$$\tilde{h}_{w,j} = \tilde{h}_{w,j-1} - \tilde{\Delta}_{w,j}. \quad (2)$$

Теперь перейдем к методике преобразования сетки при численной реализации всей модели. Чтобы исключить разночтения, примем следующую (частично уже использованную выше) терминологию. Часть сетки, изображающую снег, условимся называть ее снежным участком (будем также говорить о снежных узлах и блоках), оставшуюся часть — грунтовым участком. Понятно, что летом множество снежных узлов и блоков пусто. В свою очередь, грунтовый участок сетки на этапе выхода на ПУТП состоит из мохового участка (соответствующего НП) и собственно грунтового участка (все остальные слои разреза), а на этапе моделирования температурного режима грунта под дном водоема — из водного участка (соответствующего водохранилищу) и прежнего собственно грунтового участка.

Ранее [*Тетельбаум, 1990*] был разработан алгоритм решения одномерной задачи Стефана для разреза с переменной высотой снежного покрова и соответственно изменяющимся числом снежных узлов. Этот алгоритм оставлен здесь в неизменном виде и далее речь будет идти о перестройке только грунтового, в частности, водного участка, хотя нужно иметь в виду, что на эту перестройку накладывается и преобразование всей сетки, обусловленное переменностью мощности снега. Как уже отмечалось, не будет рассматриваться и изменение сетки, отражающее просадки (последние полагаются равными нулю). Это означает, что геометрия собственно грунтового участка сетки на протяжении всего счета неизменна.

На всех этапах моделирования грунтовый участок имеет два „математических“ слоя (МС) [*Тетельбаум и др., 1998*], причем 2-й МС совпадает с собственно грунтовым участком. 1-й МС — это либо моховой, либо водный участок. Как и в алгоритме-прототипе, для 1-го МС принято $q_1 = 1$ (q_1 — знаменатель геометрической прогрессии, в которой изменяются размеры блоков 1-го МС), т. е. его блоки равновелики. В исходных данных задаются количества блоков n_{bl}^1 мохового и n_{bl}^2 собственно грунтового участков и все прочие параметры, однозначно определяющие сетку. Если h_{cov} — мощность НП, то размеры блоков мохового участка равны $\Delta h_{cov} = h_{cov}/n_{bl}^1$. Далее в области с укороченной сеткой, т. е. сеткой, состоящей из мохового участка и первых $\tilde{n}_{bl}^2$ блоков ($\tilde{n}_{bl}^2 < n_{bl}^2$) собственно грунтового участка, по методике работы [*Шендер и др., 1990*] делается выход на ПУТП. Практически укороченная сетка должна охватывать только слой годовых колебаний температуры и, как правило, может иметь размер H_{short} не более 20—30 м, полная же (расширенная) сетка соответствует области, на которой изучается многолетнее протаивание в течение нескольких десятков лет и ориентировочный размер H_{wid} которой 100—150 м. От укороченной сетки к расширенной возвращаемся после нахождения ПУТП. Соответственно заданным значениям геотермического потока q_g и коэффициента теплопроводности $\lambda_{f,n_{lr}}$ (в мерзлом состоянии) n_{lr}-го (т. е. последнего) физического слоя разреза (n_{lr} — количество слоев) ищется исходный геотермический градиент, величина которого однако не должна превышать ту, которая обеспечивает отрицательные начальные температуры во всей вновь появившейся подобласти (H_{short}, H_{wid}):

$$\Gamma_g = \left(q_g/\lambda_{f,n_{lr}} - t\,(H_{\text{short}})/(H_{wid} - H_{\text{short}})\right), \quad (3)$$

где $t\,(x)$ — мгновенная температура в точке x. Температуры в узлах этой подобласти назначаются по формуле

$$t\,(x) = t\,(H_{\text{short}}) + \Gamma_g \cdot (x - H_{\text{short}}). \quad (4)$$

Алгоритм выхода на ПУТП построен так, что при сезонном протаивании он заканчивается в конце модельного лета. Поэтому по завершении алгоритма просчитывается (уже на расширенной сетке) еще одна, буферная зима с начальными условиями, полученными на момент отыскания ПУТП и дополненными согласно формулам (3)—(4), и прежними поверхностными условиями и значениями теплофизических свойств грунта и НП.

Удаление НП (по окончании этой зимы) состоит в перенумерации блоков и узлов, которое представляет из себя последовательность таких операций. Во-первых, общее число блоков полагается равным n_{bl}^2. Затем в цикле по $i = 1, ..., n_{bl}^2$ делаются присвоения: $z_i := z_{i+n_{bl}^1} - h_{cov}$, $h_{bl,i} := h_{bl,i+n_{bl}^1}$, $t_i := t_{i+n_{bl}^1}$, где z_i — координата i-го узла, отсчитываемая от верхней границы области счета, взятой без снега, т. е. от верхней границы 1-го блока грунтового участка сетки; $h_{bl,i}$ — размер i-го блока, t_i — температура в i-м узле (синхронно с этими присвоениями, равно как и синхронно с рассматриваемыми ниже аналогичными переприсвоениями параметров сетки и узловых температур при залитии разреза водой, перемещении ГУ на дно, возвращении их на поверхность и зимней сработке водохранилища. Подобные переприсвоения выполняются для ряда вспомогательных полей, участвующих в локализации фазовых фронтов и слежении за динамикой их перемещения, и для массива, в котором на каждом временном слое суммируются узловые температуры для последующего вычисления в конце года среднегодовых температур). Наконец, мощность $h_{lr,1}$ 1-го физического слоя (который формально продолжает существовать) принимается равной нулю и осуществляется присвоение значений всех теплофизических свойств блокам новой сетки (алгоритм присвоения см. в статье [*Тетельбаум и др., 1998*].

Начнем теперь рассмотрение принципов перестройки сетки для воспроизведения регулирования уровня водохранилища. Операция помещения верхних ГУ на дно, т. е. удаления „столбика" воды в начале каждого модельного лета, делается совершенно так же, как и снятие НП, только роль h_{cov} здесь выполняет фактическая мощность слоя воды $\tilde{h}_{w,n_w}$ на конец зимнего периода, а роль n_{bl}^1 — количество блоков водного участка сетки, соответствующее этой мощности.

Сами принципы построения водного участка сетки в основном повторяют таковые для предыдущей модели. Число узлов и размер блока этого участка на конец j-го зимнего шага равны

$$n_{bl}^{1,j} = [n_{\max}^1 \cdot (1 - \exp(-\alpha_1 \tilde{h}_{w,j})) + 0{,}5]; \; h_{bl}^{1,j} = \tilde{h}_{w,j} / \max(1, n_{bl}^{1,j}), \qquad (5)$$

где $n_{\max}^1$ — максимально возможное число блоков водного участка.

Для восстановления (в начале зимы) водохранилища по найденному из заданной функции $h_w(t)$ значению $h_{w,0}$ его глубины на конец лета машина рассчитывает $n_{bl}^{1,0}$ и $h_{bl}^{1,0}$. Затем, если $n_{bl}^{1,0} = 0$, алгоритм восстановления полагается законченным, так как перестройка сетки не требуется. В противном случае общее количество блоков грунтового участка сетки принимается равным $n_{bl}^{1,0} + n_{bl}^2$ и в цикле по $i = 1, ..., n_{bl}^2$ выполняются действия: $z_{n_{bl}^{1,0}+n_{bl}^2-i+1} := z_{n_{bl}^2-i+1} + h_{w,0}$; $h_{bl,n_{bl}^{1,0}+n_{bl}^2-i+1} := h_{bl,n_{bl}^2-i+1}$; $t_{n_{bl}^{1,0}+n_{bl}^2-i+1} := t_{n_{bl}^2-i+1}$, после чего в цикле по $i = 1, ..., n_{bl}^{1,0}$ устанавливаются координаты всех вновь появившихся узлов и блоков, т. е. узлов и блоков водного участка сетки. С учетом равновеликости этих блоков: $\forall i \le n_{bl}^{1,0}$ имеем: $h_{bl,i} = h_{bl}^{1,0}$, $z_i = (i-1) \cdot h_{bl}^{1,0}$. В том же цикле, т. е. синхронно с установлением $h_{bl,i}$ и z_i восстановленного водного участка производится присвоение начальных температур всем его узлам. В протестированном численным экспериментом варианте программы принято: $\forall i \le n_{bl}^{1,0}$: $t_i = +4$ °C, т. е. температура в этих узлах назначается равной +4 °C, хотя, вероятно, более корректно задание в них температуры, являющейся монотонно возрастающей выпуклой функцией координаты узла и изменяющейся от 0 °C на поверхности до +4 °C на дне. Завершается процедура восстановления назначением мощности $h_{lr,1}$ 1-го физического слоя, равной $h_{w,0}$, и должным присвоением значений свойств блокам новой сетки, в том числе свойств воды всем блокам 1-го физического слоя, совпадающего с 1-м МС.

Самым сложным является преобразование сетки на каждом временном слое зимнего периода сообразно уменьшению мощности водной толщи (вернее, на тех временных слоях, на которых такое уменьшение фактически происходит). Если определяемая по формуле (1) убавка уровня равна нулю, то преобразование за ненадобностью не выполняется (алгоритм считается законченным), иначе по формуле (2) рассчитывается новая глубина $\tilde{h}_{w,j}$, по формулам (5) — новые параметры водного участка сетки. Затем в цикле по $i = 1, ..., n_{bl}^2$ производятся переприсвоения (т. е. надлежащая перенумерация блоков собственно грунтового участка): $z_{i+n_{bl}^{1,j}} := z_{i+n_{bl}^{1,j-1}} - \widetilde{\Delta} h_{w,j}$; $h_{bl,i+n_{bl}^{1,j}} := h_{bl,i+n_{bl}^{1,j-1}}$; $t_{i+n_{bl}^{1,j}} := t_{i+n_{bl}^{1,j-1}}$, после чего выполняется самая трудоемкая часть всего алгоритма перестройки. В рамках новой модели постулируется, что убавка воды состоит в вырезании из области счета участка высотой $\widetilde{\Delta} h_{w,j}$, нижняя граница которого совпадает с нижней границей „столбика" воды, т. е. предполагается, что вода уходит снизу. Оставшиеся части области „склеиваются" с сохранением температурного поля на момент вырезания. Так как геометрия (размер блоков) водного участка при этом изменяется, то необходимо поле прежней сетки, т. е. сетки $(j-1)$-го временного шага перенести на сетку j-го шага. Численный эксперимент показал, что отыскание температуры в узле водного участка новой сетки линейной интерполяцией температур в той паре узлов старой сетки, между которыми лежит этот узел, ввиду того, что такую процедуру приходится выполнять на каждом временном слое, приводит к заметному накоплению погрешностей. Более точным, учитывая излом термограммы на фазовой границе „лед—вода“, оказывается перенос с помощью квадратичной интерполяции. Его алгоритм таков. Если $n_{bl}^{1,j} = 0$, т. е. множество узлов водного участка на j-м временном слое становится пусто, то алгоритм полагается завершенным (перенос не требуется). В противном случае для каждого $\bar{k}$-го узла ($k = 1, ..., n_{bl}^{1,j}$) нового водного участка отыскивается такое i, что $(z_{\bar{k}} > z_{i-1}) \wedge ((z_{\bar{k}} < 0{,}5(z_i + z_{i-1})) \vee (i = n_{bl}^{1,j})) = \text{true}$. В левых частях записанных неравенств подразумеваются координаты узлов сетки текущего, а в правых — предыдущего шага. Предполагая, что в интервале (z_{i-1}, z_{i+1}) термограмма имеет форму параболы, температуру в $\bar{k}$-м узле вычисляем по следующей формуле (вывод которой несложен):

$$t_{\bar{k}} = \left[\frac{\bar{t}_i(\bar{z}_{\bar{k}} - \bar{z}_{i+1})}{\bar{z}_i} - \frac{\bar{t}_{i+1}(\bar{z}_{\bar{k}} - \bar{z}_i)}{\bar{z}_{i+1}}\right] \cdot \frac{\bar{z}_{\bar{k}}}{\bar{z}_i - \bar{z}_{i+1}} + t_{i-1},$$

где $\bar{z}_i = z_i - z_{i-1}$, $\bar{z}_{i+1} = z_{i+1} - z_{i-1}$, $\bar{z}_{\bar{k}} = \bar{z}_{\bar{k}} - z_{i-1}$, $\bar{t}_i = t_i - t_{i-1}$, $\bar{t}_{i+1} = t_{i+1} - t_{i-1}$. Здесь $i = 1, ..., n_{bl}^{1,j-1}$. В качестве температуры и координаты несуществующего 0-го узла (при $i = 1$) берутся температура и координата поверхности водохранилища (т. е. температура под снегом), а за температуру и координату $(n_{bl}^{1,j-1} + 1)$-го узла принимаются таковые для дна.

Вычисление среднегодовых температур в узлах водного участка сетки этой методикой не предусмотрено.

Разработанная программа, моделируя динамику температурного поля, одновременно прослеживает многолетнюю динамику глубины h_{ac} деятельного слоя и среднегодовой температуры t_0 на его подошве. При сезонном протаивании h_{ac} отсчитывается от дна, при сезонном промерзании (т. е. после перехода сезонного протаивания в многолетнее) — от первоначальной (на начало зимы) отметки зеркала водохранилища. Если при этом h_{ac} лежит в воде, т. е. лед к концу зимы не лег на грунт, за t_0 принимается среднегодовая температура донных отложений (температура на дне). При многолетнем протаивании прослеживается также динамика координаты t_{th} его фронта, отсчитываемой от дна.

Литература

Тетельбаум А. С., Фельдман Г. М., Шендер Н. И. Особенности численной (конечно-разностной) реализации одномерной математической модели термокарстового процесса // Криосфера Земли, 1998, т. 2, № 2, с. 43—47.

Шендер Н. И., Тетельбаум А. С., Фельдман Г. М. Алгоритм ускоренного поиска периодически установившегося режима при решении задачи Стефана без начальных условий // Геокриологические исследования на севере Западной Сибири. Новосибирск, Наука, 1990, с. 105—110.

Тетельбаум А. С. Модифицированный разностный метод со сглаживанием коэффициентов для решения задачи Стефана // Геокриологические исследования на севере Западной Сибири. Новосибирск, Наука, 1990, с. 111—118.

Поступила в редакцию
28 июля 1998 г.