

ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА МЕРЗЛЫХ ГРУНТОВ

УДК 54.12

ПАРАМЕТРЫ КРИТИЧЕСКОГО ЗАРОДЫША ЛЬДА В ПРИСУТСТВИИ ПОСТОЯННОГО ОДНОРОДНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Г. В. Аникин, С. Н. Плотников, А. В. Шавлов

Институт криосферы Земли СО РАН, 625000, Тюмень, а/я 1230, Россия

Предложена математическая модель, позволяющая определить параметры критического зародыша льда в переохлажденной воде в присутствии постоянного однородного электрического поля. Показано, что при достаточно сильных электрических полях критическому зародышу термодинамически выгоднее иметь форму вытянутого эллипсоида вращения. На основе полученных аналитических выражений рассчитана степень асимметрии критического зародыша льда в зависимости от величины электрического поля.

Электрическое поле, критический зародыш, лед, вода, кристалл

PARAMETERS OF CRITICAL ICE GERM IN HOMOGENEOUS ELECTRIC FIELD ENVIRONMENT

G. V. Anikin, S. N. Plotnikov, A. V. Shavlov

Earth Cryosphere Institute, SB RAS, 625000, Tyumen, P/O Box 1230, Russia

A mathematical model allowing to define the parameters of critical ice germ in overcooled water in homogeneous electric field environment is suggested. It is demonstrated, that it's more convenient for the critical germ to have stretched rotation ellipsoid form, providing electric fields are strong enough. Degree of critical ice germ asymmetry depending on electric field's intensity is calculated basing on obtained analytical equations.

Electric field, critical germ, ice, water, crystal

В настоящее время физика льда и, в частности, вопросы исследования влияния электрических полей на образование и рост зародышей льда в переохлажденной воде являются достаточно интересными задачами физики фазовых переходов. Существует ряд работ, в том числе отечественных авторов [Козловский и др., 1976; Шлыков, 1979], где представлены результаты экспериментов по влиянию электрического поля на кристаллизацию воды и высказаны общие предположения относительно механизма явления. В работе В. В. Клинго, В. В. Шлыкова [1979] приведен опыт теоретического рассмотрения гомогенной кристаллизации капель воды, находящихся в однородном постоянном электрическом поле. Ранее нами было рассмотрено влияние постоянного однородного электрического поля на частоту гомогенного зародышеобразования и на форму достаточно большого растущего кристалла льда [Аникин и др., 1999, 2001а,б].

В представленной работе предложена математическая модель, позволяющая определять параметры критического зародыша льда под влиянием постоянного однородного электрического поля. Показано, что в присутствии электричес-

кого поля критическому зародышу термодинамически выгоднее иметь форму вытянутого эллипсоида вращения.

Запишем формулу работы образования зародыша льда в переохлажденной воде в присутствии постоянного однородного электрического поля [Ландау, Лифшиц, 1982; Фрелих, 1960]:

$$R_{\min} = -\frac{V}{V_2} (\mu_1 - \mu_2) + \alpha S + \Delta F_{\text{эл}}, \quad (1)$$

$$\Delta F_{\text{эл}} = -\frac{1}{8\pi} \epsilon_1 \frac{E_{\infty}^2 x}{1 + Nx} V, \quad x = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1},$$

где V_2 — молекулярный объем льда; μ_1, μ_2 — химический потенциал воды и льда соответственно; α — коэффициент поверхностного натяжения; S — площадь поверхности зародыша; ϵ_1, ϵ_2 — диэлектрическая проницаемость воды и льда соответственно; E_{∞} — напряженность электрического поля; V — объем зародыша льда; N — параметр, задаваемый геометрией зародыша.

Для зародышей, имеющих форму эллипсоида, $N = \frac{F_1}{F_1 - F_2}$; F_1 и F_2 — фокусные расстояния. Путем несложных преобразований N

ПАРАМЕТРЫ КРИТИЧЕСКОГО ЗАРОДЫША ЛЬДА

Значения функции отношения полуосей эллипсоида $y = a/b$ в зависимости от напряженности электрического поля для воды при $t = -10^\circ\text{C}$

E (кВ/м)	45 220	90 440	143 000	202 200	247 700	319 800	404 303	639 500
$y = a/b$	0,998	0,992	0,979	0,961	0,944	0,912	0,874	0,773

можно записать как функцию отношения полуосей эллипсоида $y = \frac{a}{b}$:

$$N(y) = \frac{y^2}{y^2 - 1} \left[\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \ln \frac{(1 + \sqrt{1 - y^2})}{(1 - \sqrt{1 - y^2})} - 1 \right], \quad (2)$$

при $0 \leq y \leq 1$ — вытянутый эллипсоид;

$$N(y) = \frac{y^2}{y^2 - 1} \left[\frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}} \left(\arctg \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} - \frac{\pi}{2} \right) + 1 \right],$$

при $1 \leq y \leq \infty$ — сплюснутый эллипсоид.

Площадь поверхности эллипсоидов равна соответственно:

$$S(y) = 2\pi \left(\frac{3V}{4\pi} \right)^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\arcsin \sqrt{1 - y^2}}{y \sqrt{1 - y^2}} + 1 \right),$$

при $0 \leq y \leq 1$, (3)

$$S(y) = 2\pi \left(\frac{3V}{4\pi} \right)^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\operatorname{arcsh} \sqrt{1 - y^2}}{y \sqrt{y^2 - 1}} + 1 \right),$$

при $1 \leq y \leq \infty$.

Таким образом, выражение (1) с учетом (2) и (3) можем записать:

$$R_{\min} = -\frac{V}{V_2} (\mu_1 - \mu_2) + \frac{\alpha}{2} (4\pi)^{\frac{1}{3}} (3V)^{\frac{2}{3}} f(y) - \frac{1}{8\pi} \frac{\varepsilon_1 E_\infty^2 x}{1 + N(y)x} V, \quad (4)$$

здесь $f(y) = y^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\arcsin \sqrt{1 - y^2}}{y \sqrt{1 - y^2}} + 1 \right)$ при $0 \leq y \leq 1$,

$$f(y) = y^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\operatorname{arcsh} \sqrt{y^2 - 1}}{y \sqrt{y^2 - 1}} + 1 \right) \text{ при } 1 \leq y \leq \infty.$$

В нашем случае, когда $\mu_1 > \mu_2$, найдем параметры критического зародыша, решая уравнение:

$$\frac{\partial R_{\min}}{\partial V} = 0. \quad (5)$$

Введем обозначения $A = \frac{\mu_1 - \mu_2}{V_2}$, $B = \frac{1}{8\pi} E_\infty^2 \varepsilon_1$.

Решая уравнение (5), найдем объем зародыша V_* :

$$V_* = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{\alpha f(y)}{A + \frac{Bx}{1 + N(y)x}} \right)^3. \quad (6)$$

Теперь среди всех значений V_* найдем минимальное:

$$\frac{\partial V_*}{\partial y} = 0 \text{ или}$$

$$f' \left(1 + \frac{Bx}{A} (1 + Nx)^{-1} \right) + \frac{fBx^2 N'}{A(1 + Nx)^2} = 0. \quad (7)$$

Проанализируем выражение (7). Так как у нас всегда $f > 0$ и $N' > 0$, что нетрудно показать, то очевидно: чтобы (7) выполнялось, необходимо чтобы $f' < 0$, и, следовательно всегда будет выполняться неравенство $y = \frac{a}{b} < 1$. Это означает, что критический зародыш льда в присутствии электрического поля имеет форму вытянутого эллипсоида.

Таким образом, так как $\frac{a}{b}$ не зависит от α , имеем:

$$V_* = \frac{4\pi}{3} \frac{\alpha^3}{A^3} \left(\frac{f(y)}{1 + \frac{Bx}{A(1 + N(y))}} \right)^3. \quad (8)$$

Отсюда значение y может быть найдено либо построением V_* , либо решением уравнения (7). Нами, с использованием данных из работ [Сморыгин, 1988; Эйзенберг, Кауцман, 1975], были рассчитаны и приведены в таблице значения y для критического зародыша льда в переохлажденной до -10°C воде в зависимости от величины электрического поля. Выполненные оценки показывают, что асимметрия критического зародыша существенна только для больших величин электрического поля.

Литература

Аникин Г.В., Плотников С.Н., Шавлов А.В. Влияние однородного постоянного электрического поля на гомогенную кристаллизацию воды // Деп. в ВИНТИ 18.01.99, № 94-В99.
 Аникин Г.В., Плотников С.Н., Шавлов А.В. Влияние постоянного однородного электрического поля на образование зародышей льда // Криосфера Земли, 2001а, т. V, № 1, с. 68—70.
 Аникин Г.В., Плотников С.Н., Шавлов А.В. Влияние постоянного однородного электрического поля на форму зародышей льда // Криосфера Земли, 2001б, т. V, № 4, с. 36—37.
 Клинго В.В., Шлыков В.В. Теоретический расчет гомогенной кристаллизации переохлажденных водяных капель, находящихся в постоянном однородном электрическом поле // Тр. ГГО, 1979, вып. 420, с. 15—25.
 Козловский М.И., Бурчаков В.И., Мелентьев И.И. Электрическое поле и кристаллизация. Кишинев, Штиница, 1976, 201 с.

Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М., Наука, 1982, 622 с.

Сморьгин Г.И. Теория и методы получения искусственного льда. Новосибирск, Наука, 1988, 282 с.

Фрелих Г. Теория диэлектриков. М., Иностр. лит-ра, 1960, 252 с.

Шлыков В.В. Экспериментальное исследование влияния постоянного электрического поля на замерзание капель воды // Тр. ГГО, 1979, вып. 420, с. 68—75.

Эйзенберг Д., Кауцман В. Структура и свойства воды. Л., Гидрометеоиздат, 1975, 279 с.

*Поступила в редакцию
30 октября 2002 г.*