

ЭКОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ КРИОЛОГИИ ЗЕМЛИ

УДК 551.48:631.3

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ КОНТРОЛЯ НЕФТЕЗАГРЯЗНЕННОСТИ  
ВОДОТОКОВ НА МЕСТОРОЖДЕНИЯХ С ДЛИТЕЛЬНЫМИ ПЕРИОДАМИ  
ЛЕДОСТАВА: ИДЕНТИФИКАЦИЯ. II\***

**И.Г. Соловьев, П.В. Пикиноров**

*Институт криосферы Земли СО РАН, 625000, Тюмень, а/я 1230, Россия, pavelpvf1@mail.ru*

Разрабатывается алгоритм идентификации параметров гидрохимической модели нефтезагрязненности водотока. Раздельная идентификация моделей летнего и зимнего периодов упрощает задачу за счет сокращения размерностей векторов оцениваемых параметров. Итеративная схема идентификации включает два цикла. Внутренний цикл связан с методом оценивания модели нелинейной регрессии, внешний реализует схему настройки “фильтров береговой полосы”.

*Гидрохимическая модель, идентификация, метод наименьших квадратов, ошибка приближения, сходимость алгоритма*

**MATHEMATICAL METHODS OF OIL POLLUTION CONTROLLING IN WATERCOURSES CONFINED  
TO OILFIELDS WITH THE LONG PERIODS OF FREEZE-UP: IDENTIFICATION. II**

**I.G. Solovyev, P.V. Pickinorov**

*Earth Cryosphere Institute SB RAS, 625000, Tyumen, P/O box 1230, Russia, pavelpvf1@mail.ru*

The identification parameter algorithm of the hydrochemical model of the oily watercourse is developed. Separated identification of winter and summer models simplifies the identification problem due to the reduction of vector length of the estimated parameters. The iterative identification scheme includes two cycles. The internal cycle is the method of evaluation of the nonlinear regression model, and the external realizes the adjustment scheme of “waterside filters”.

*Hydrochemical model, identification, the least square method, approximation error, algorithm convergence*

**ВВЕДЕНИЕ**

Представленный в предыдущей статье [Соловьев и др., 2008] материал по-новому (сеем надеяться) схематизирует гидрохимию водотоков с явным учетом многофакторных механизмов проявления вторичных загрязнений. Параметрическая настройка моделей подобного класса с привязкой к конкретному водотоку возможна лишь на основе создания алгоритмов идентификации по данным регулярных наблюдений качества воды во входо-выходных створах на годовых и/или сезонных циклах. Однако на начальном этапе исследований главным и наиболее доступным механизмом проверки является вычислительный эксперимент, подтверждающий принципиальную разрешимость обратной задачи при соответствующем наборе данных измерений, поскольку настройка моделей на основе лабораторных исследований весьма проблематична ввиду сложности воспроизведения адекват-

ных условий эксплуатации, а верификация на основе натурных испытаний также неоднозначна из-за невозможности точного контроля объема поверхностного стока. В данной статье представлен синтетический пример, когда по модели с заданными параметрами [Соловьев и др., 2008] рассчитывается динамика масс, а затем на основе этих данных с помощью нижеприведенного алгоритма идентификации восстанавливаются кинетические параметры модели. Таким образом, данная работа формулирует требования к регламенту проведения замеров качества водной среды и донных отложений в целях функционирования алгоритма оценивания.

Рассматривается задача параметрической идентификации однокамерной [Кюнж и др., 1985] гидрохимической модели водотока, лежащей в основе технологии слежения за объемами скрытых нефтезагрязнителей (НЗ). Исходная модель пред-

\* Часть I опубликована в журнале “Криосфера Земли”, 2008, т. XII, № 2, с. 25–31.

ставлена системой дифференциальных уравнений (1)–(9)<sup>1</sup> из работы [Соловьев и др., 2008]. Представленная модель по учету влияния сезонных факторов может быть декомпозирована на две более простые. В летнее время ледовая составляющая НЗ  $M_3(t) \equiv 0$  отсутствует, вследствие чего получаем (основные используемые обозначения приведены в конце статьи):

$$\begin{cases} \dot{M}_1(t) = m_0(t) + m_u(t) - m_1(t) + \alpha_u^T \cdot \mathbf{u}(t) - \\ \quad - (\alpha_1^T \cdot \mathbf{V}_1(t) + \beta_1^T \cdot \mathbf{w}_1(t) + \beta_4)M_1(t) + \\ \quad + \lambda_2^T \cdot \mathbf{w}_2(t)M_2(t) + \lambda_4 M_4(t), \\ \dot{M}_2(t) = -(\alpha_2^T \cdot \mathbf{V}_2(t) + \lambda_2^T \cdot \mathbf{w}_2(t))M_2(t) + \\ \quad + \beta_2^T \cdot \mathbf{w}_1(t)M_1(t), \\ \dot{M}_4(t) = -\alpha_4^T \cdot \mathbf{V}_4(t)M_4(t) + \beta_4 M_1(t), \end{cases} \quad (1)$$

где  $M_1(t)$ ,  $M_2(t)$ ,  $M_4(t)$  – масса “подвижного” НЗ в воде, на берегу и в донных отложениях соответственно;  $m_0(t) = c_0(t)Q_0(t)$ ,  $m_1(t) = c_1(t)Q_1(t)$  – масса НЗ во входном и выходном потоках;  $m_u(t)$  – контролируемое поступление массы НЗ в водоток;  $m_p(t) = \alpha_u^T \cdot \mathbf{u}(t)$  – априорно неизвестное (скрытое) поступление НЗ с неизвестным вектором интенсивностей  $\alpha_u \in \mathbf{R}^l$  и вектором базисных функций  $\mathbf{u}(t)$ . Подробное описание модели дано в статье [Соловьев и др., 2008].

В зимнее время  $t : E(t) = 0$  модель имеет более простой вид, не связанный с трансформацией берегового НЗ ( $M_2(t) = -\alpha_{23}M_2(t)$ ), а именно:

$$\begin{cases} \dot{M}_1(t) = m_0(t) + m_u(t) - m_1(t) + \\ \quad + \alpha_u^T \cdot \mathbf{u}(t) - (\beta_3 + \beta_4)M_1(t) + \\ \quad + \lambda_3 M_3(t) + \lambda_4 M_4(t), \\ \dot{M}_3(t) = -(\alpha_3 + \lambda_3)M_3(t) + \beta_3 M_1(t), \\ \dot{M}_4(t) = -(\alpha_4 + \lambda_4)M_4(t) + \beta_4 M_1(t), \end{cases} \quad (2)$$

где  $M_3(t)$  – масса НЗ, сорбируемая льдом.

Под идентификацией понимается отношение  $U : I \rightarrow \hat{\mathbf{c}}$ , устанавливающее по информации о входо-выходных процессах  $I$ , вектор оценок  $\hat{\mathbf{c}}$  параметров  $\mathbf{c}$  уравнений, связывающих эти процессы. В рамках введенных обозначений блочный вектор искомым параметров

$$\mathbf{c}_1^T = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \beta_1 \quad \beta_3 \quad \beta_4 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \quad \lambda_4 \quad M_2(t_H) \quad M_4(t_H) \quad \alpha_u] \in \mathbf{R}^{23+l}$$

имеет высокую размерность  $n = 23 + l$ . Условие идентифицируемости требует значительной представительности данных выборки измеряемых процессов. Типовой набор данных описывается следующим образом:

$$I = \begin{pmatrix} M_1(t) & m_0(t) & m_1(t) & m_u(t) \end{pmatrix}$$

$$\left| \Theta_1(t) \quad \Theta_2(t) \quad h(t) \quad h_p(t) \quad e^\downarrow(t) \right| \mathbf{u}(t) : t \in T$$

Здесь выделены данные о состоянии и динамике загрязнения водной среды, метеоданные о температурах, влажности, осадках (рис. 1), которые являются среднегодовыми графиками соответствующих параметров, восстановленными гидрометеослужбами на основе анализа статистических данных, и индикаторная вектор-функция типизированных скрытых сбросов. Для простоты анализа типизируются два вида событий – постоянно действующий сброс и кратковременные аварийные сбросы. При данных предположениях выбор индикаторов  $u_i(t)$  определяется типом и временем  $t_u(i)$  начала действия события, а интенсивность его  $\alpha_{ui}$  подлежит оцениванию.

Раздельная идентификация моделей (1) и (2) соответственно летнего ( $t \in T_1$ ) и зимнего ( $t \in T_2$ ) периодов частично упрощает задачу за счет сокращения размерностей векторов оцениваемых параметров. Рассмотрим подробнее задачу  $U_1$  идентификации модели летнего периода (1). Надежность параметрического оценивания модели (1) существ-

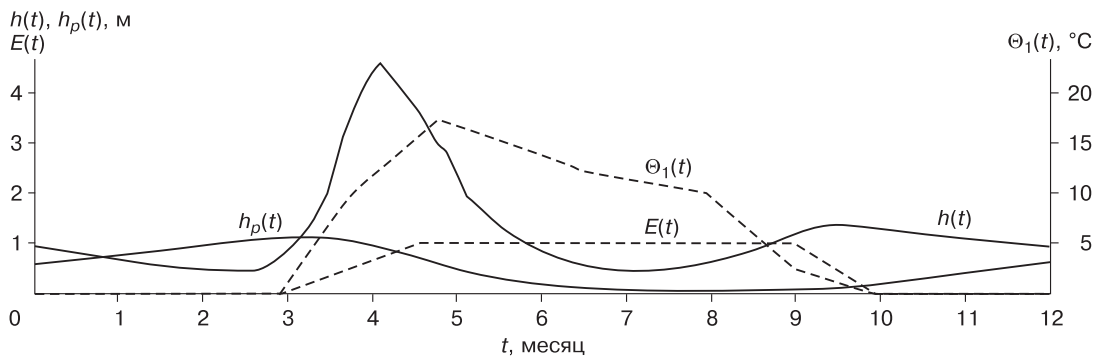


Рис. 1. Динамика гидрометеосостояний модели:

$h_p(t)$  – уровень поверхностной влаги;  $\Theta_1(t)$  – температура поверхности;  $h(t)$  – уровень воды в водотоке;  $E(t)$  – функция снеготаяния ( $E(t) = 1$  летом,  $E(t) = 0$  зимой,  $0 < E(t) < 1$  в переходные периоды).

<sup>1</sup> Используются следующие обозначения [Малоземов, Певный, 1986]:  $(a)_+ = \{a, \text{ если } a \geq 0; 0, \text{ если } a < 0\}$ ,  $\mathbf{a}^T, \mathbf{\beta}^T$  – операция транспонирования вектор-столбца, т. е.  $\mathbf{a}^T = [a_1 \dots a_n]$ ,  $\mathbf{\beta}^T = [\beta_1 \dots \beta_n]$ .

венно повышается, если в набор контролируемых данных добавляется переменная  $M_4(t)$  – масса донных отложений. В этом случае общая задача  $U_1$  разбивается на последовательность из двух более простых задач, с укороченными векторами оцениваемых параметров. Вначале идентифицируется модель донных отложений  $U_4$ , затем на основе полученных результатов решается задача оценки модели “водная среда–берег”.

### АЛГОРИТМ ИДЕНТИФИКАЦИИ МОДЕЛИ ДОННЫХ ОТЛОЖЕНИЙ

Основные положения теории параметрического оценивания поясним на задаче  $U_4$  идентификации модели донных отложений (1), (2):

$$\dot{M}_4(t) = -\alpha_4^T \cdot \mathbf{V}_4(t)M_4(t) + \beta_4 M_1(t), \quad t \in T_1, \quad (3)$$

где  $\alpha_4^T \cdot \mathbf{V}_4(t) = \alpha_{41}\Theta_1(t)_+ + \alpha_{42}(\Theta_1(t) - \Theta_{10})_+ + \alpha_{43} + \alpha_{44}(h_p(t) - \bar{h}_p)_+ E(t)$ ,  $\alpha_4^T = [\alpha_{41} \quad \alpha_{42} \quad \alpha_{43} \quad \alpha_{44}]$ ,  $\mathbf{V}_4^T(t) = [\Theta_1(t)_+ \quad (\Theta_1(t) - \Theta_{10})_+ \quad 1 \quad (h_p(t) - \bar{h}_p)_+ E(t)]$ .

Заметим, что модель донных отложений летнего периода (1) включает как частный случай (при  $\Theta_1(t) \rightarrow 0$ ,  $E(t) = 0$ ) модель для зимнего периода.

В реальной практике контроля загрязненности водных объектов замеры донных отложений  $M_4(t)$  реализуются гораздо реже, чем частота замеров качества воды  $M_1(t)$ , однако в последнее время практика контроля донных отложений находит все большее применение: на территории Ханты-Мансийского автономного округа (ХМАО) действуют правовые акты<sup>2</sup>, обязывающие производить замеры донных отложений до четырех раз в год (ежеквартально) [Бабушкин, 2007]. При надлежащем обустройстве контрольных створов водотока замеры концентрации НЗ в воде могут быть реализованы в автоматическом режиме [Wei Yang et al., 2007].

Пусть  $\Delta t_1 = t_{k+1} - t_k$  – достаточно малый период измерений переменной  $M_1(t_k) = M_1(k)$  и вектора  $\mathbf{V}_4(k)$ . Перейдем от (3) к приближенному разностному аналогу в дискретном времени [Рябенский, 1994]:

$$\Delta M_4(k) = -\alpha_4^T \cdot \mathbf{V}_4(k)M_4(k) + \beta_4 M_1(k), \quad k \in \{1 \dots N\}, \quad t_1 = t_n, \quad (4)$$

где  $\Delta$  – оператор правой разности первого порядка с дискретой  $\Delta t_1$ , т. е.  $\Delta x(k) = (x(k+1) - x(k))/\Delta t_1$ .

В условиях разновременности измерений  $M_1(k)$  и  $M_4(k)$  для построения итеративной процедуры оценивания воспользуемся формализмом операторной алгебры и проведем преобразования (4).

Пусть  $\alpha_4(j)$ ,  $\beta_4(j)$  – оценки искоемых параметров модели (3)  $j$ -го приближения ( $\alpha_4(1)$ ,  $\beta_4(1)$  – начальные значения априорно известны).

Представим  $\alpha_4 = \alpha_4(j) - \delta\alpha_4(j)$  и запишем (4) в виде

$$\begin{aligned} (\Delta + \alpha_4^T(j) \cdot \mathbf{V}_4(k))M_4(k) &= \\ &= \beta_4 M_1(k) + \delta\alpha_4^T(j) \cdot \mathbf{V}_4(k)M_4(k). \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} M_4(k) &= \beta_4 M_{14}(j, k) + \\ &+ \delta\alpha_4^T(j) \cdot \mathbf{x}_4(j, k) + M_4(1)e_4(j, k), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $M_{14}(j, k)$  и  $e_4(j, k)$ ,  $k \in \{1 \dots N\}$  – процессы, генерируемые цифровыми фильграми:

$$\begin{aligned} (\Delta + \alpha_4^T(j) \cdot \mathbf{V}_4(k))M_{14}(j, k) &= M_1(k), \\ M_{14}(j, 1) &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$(\Delta + \alpha_4^T(j) \cdot \mathbf{V}_4(k))e_4(j, k) = 0,$$

$$e_4(j, 1) = 1,$$

а  $\mathbf{x}_4(j, k)$  – вектор-функция, удовлетворяющая уравнению

$$\begin{aligned} (\Delta + \alpha_4^T(j) \cdot \mathbf{V}_4(k)) \cdot \mathbf{x}_4(j, k) &= \mathbf{V}_4(k)M_4(k), \\ \mathbf{x}_4(j, 1) &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

не может быть воспроизведена из-за отсутствия данных частых измерений  $M_4(k)$ . На основании (5) введем приближенную оценку процесса  $M_4(k)$  выражением

$$\begin{aligned} \hat{M}_4(j, k) &= \beta_4(j)M_{14}(j, k) + M_4(j, 1)e_4(j, k), \\ k &\in \{1 \dots N\}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $M_4(j, 1)$  – приближение начального значения в момент времени  $t_1$ . Тогда оценка процесса  $\mathbf{x}_4(j, k)$  может быть сгенерирована векторным фильтром по закону:

$$\begin{aligned} (\Delta + \alpha_4^T(j) \cdot \mathbf{V}_4(k)) \cdot \hat{\mathbf{x}}_4(j, k) &= \\ &= \mathbf{V}_4(k)M_4(j, k), \\ \hat{\mathbf{x}}_4(j, 1) &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (8)$$

<sup>2</sup> Постановление Правительства Ханты-Мансийского автономного округа – Югры от 29 июля 2003 г. № 302-п “Об утверждении требований к определению исходной (фоновой) загрязненности компонентов природной среды, проектированию и ведению системы локального экологического мониторинга в границах лицензионных участков недр на территории ХМАО” (<http://www2.admhmao.ru:8080/law>).

С учетом принятых определений (6)–(8) модель (5) может быть записана в линейном регрессионном виде

$$M_4(k) = \mathbf{c}_4^T(j) \cdot \mathbf{z}_4(j, k) + \xi_4(j, k), \quad (9)$$

где

$$\mathbf{c}_4^T(j) = [\delta\alpha_4(j) \quad \beta_4 \quad M_4(1)],$$

$$\mathbf{z}_4(j, k) = [\hat{\mathbf{x}}_4(j, k) \quad M_{14}(j, k) \quad e_4(j, k)]^T,$$

$\xi_4(j, k)$  – ошибка, обусловленная заменой  $\mathbf{x}_4(j, k)$  на  $\hat{\mathbf{x}}_4(j, k)$ .

Для (9) типовая процедура метода наименьших квадратов (МНК) [Голуб, Ван Лоун, 1999] оценивания записывается в виде системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{F}_4(j) \cdot \hat{\mathbf{c}}_4(j) = \mathbf{b}_4(j), \quad (10)$$

где

$$\mathbf{F}_4(j) = \sum_{k \in K_4} \lambda_4(k) \mathbf{z}_4(j, k) \cdot \mathbf{z}_4^T(j, k),$$

$$\mathbf{b}_4(j) = \sum_{k \in K_4} \lambda_4(k) \mathbf{z}_4(j, k) M_4^T(k),$$

здесь  $\lambda_4(k) \geq 0$ ,  $\sum_{k \in K_4} \lambda_4(k) = 1$  – нормировочные коэффициенты,  $K_4$  – множество номеров моментов времени замеров донных отложений ( $K_4 \in \{1, 2, \dots, N\}$ ).

На основе изложенного итеративная процедура оценивания параметров модели (3) записывается в виде следующей инструкции.

Начало

1.  $I_4 = \langle M_1(k) \quad \mathbf{V}_4(k), k \in \{1 \dots N\}; M_4(k), k \in K_4 \rangle$  – ввод исходных данных.

2.  $\mathbf{c}_4^T(1) = [0 \quad \beta_4(1) \quad M_4(1, 1)]$ ,  $\alpha_4(1)$  – установка начальных настроек.

3.  $j = 1$  – начало цикла.

4.  $\mathbf{z}_4(j, k) = [\hat{\mathbf{x}}_4(j, k) \quad M_{14}(j, k) \quad e_4(j, k)]^T$ ,  $k \in \{1 \dots N\}$  – генерация регрессоров (6)–(8).

5.  $\mathbf{c}_4(j+1) = \mathbf{F}_4^{-1}(j) \cdot \mathbf{b}_4(j)$  – шаг МНК оценивания (10).

6.  $\alpha_4(j+1) = \alpha_4(j) - \delta\alpha_4(j+1)$  – коррекция фильтров (6), (8).

7. Если  $(\|\mathbf{c}_4(j+1) - \mathbf{c}_4(j)\| > \varepsilon_4)^3$ , то  $(\delta\alpha_4(j+1) = 0, j := j+1)$ , на 4, иначе (продолжить) – условный переход по анализу сходимости.

8.  $\hat{\alpha}_4 = \alpha_4(j+1)$ ,  $\hat{\beta}_4 = \beta_4(j+1)$ ,  $\hat{M}_4(1) = M_4(j+1, 1)$  – вывод результата оценивания (10).

9.  $\alpha_4(j+1) = \alpha_4(j) - \delta\alpha_4(j+1)$  – вывод оценки процесса  $M_4(k)$  в (7).

Конец

В инструкции  $\varepsilon_4$  – малый параметр точности сходимости, в условиях которой выполняется, согласно (5), (7), отношение следствия

$$\begin{aligned} (\delta\alpha_4(j) \xrightarrow{j \rightarrow 0}) &\Rightarrow (\mathbf{c}_4(j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \mathbf{c}_4, \quad \alpha_4(j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \alpha_4) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\hat{M}_4(j, k) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} M_4(k), \forall k \in \{1 \dots N\}). \end{aligned}$$

Анализ сходимости иллюстрируется примером идентификации модели (3) с параметрами из работы [Соловьев и др., 2008, с. 27, таблица] при шаге дискретизации  $\Delta t_1 = 1$  ч и периоде наблюдений  $T = [138 \div 238]$  день. Индикаторное множество замеров донных отложений  $K_4 = \{138 \ 158 \ 178 \ 198 \ 218 \ 238\}$  включает шесть точек с периодом в двадцать дней. Динамика загрязненности дна и водотока, восстановленная на основе принятых модельных положений, приведена на рис. 2.

Предложенный алгоритм идентификации имеет широкий диапазон параметрической сходимости. В экспериментах ошибка начального приближения параметров достигает 70 %. Сходимость иллюстрируется графиком пошаговых среднеквадратических отклонений (рис. 3, где  $k$  – шаг интера-

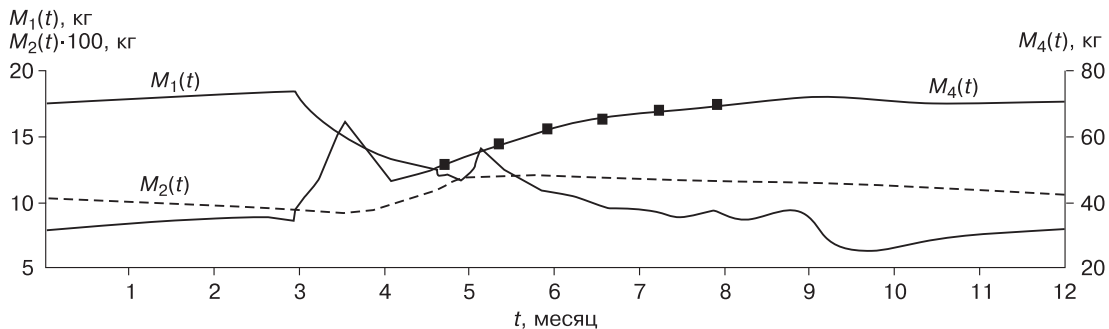
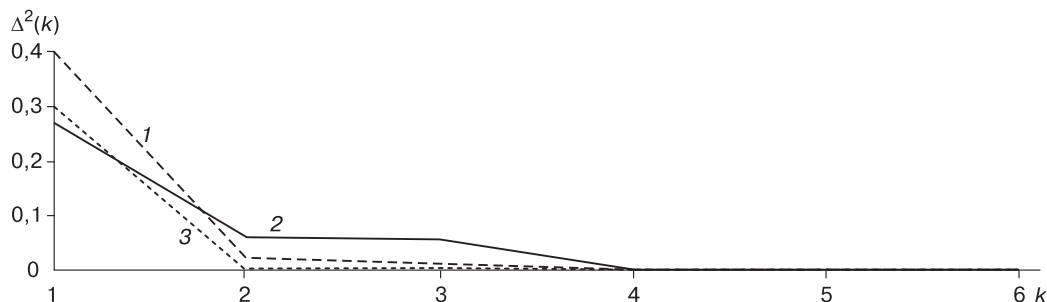


Рис. 2. Динамика нефтезагрязненности переменных модели:

$M_1(t)$  – масса НЗ в воде;  $M_2(t)$  – масса НЗ, сорбированного береговой зоной;  $M_4(t)$  – масса НЗ на дне.

<sup>3</sup>  $\|\mathbf{x}\|$  – длина вектора  $\mathbf{x}$  в евклидовой метрике [Голуб, Ван Лоун, 1999].



**Рис. 3.** Динамика среднеквадратического отклонения ( $\Delta$ ) оценок идентифицируемых параметров при решении обратной задачи для модели донных отложений:

1 – ошибка 70 %; 2 – 50 %; 3 – 40 %.

пии алгоритма оценивания). Истинные значения коэффициентов в среднем определяются за четыре прохода алгоритма:

$$\Delta(k) = \|\alpha_4 - \alpha_4(j)\|^2 + (\beta_4 - \beta_4(j))^2 + (M_4(1) - M_4(j,1))^2.$$

#### АЛГОРИТМ ИДЕНТИФИКАЦИИ МОДЕЛИ “ВОДНАЯ СРЕДА–БЕРЕГ”

Рассмотрим задачу идентификации параметров модели “водная среда–берег”  $U_2$  по измерениям качества воды  $M_1(t)$  в летнее время (1),  $t \in T_1$ . Полагается, что задача  $U_4$  решена, известны оценки  $\hat{\alpha}_4$ ,  $\hat{\beta}_4$ ,  $\hat{M}_4(1)$ , воспроизведена динамика  $M_4(k)$  в (7) с шагом  $\Delta t$  измерений переменной  $M_1(k)$ ,  $k \in \{1..N\}$ . Динамику загрязнения протяженного участка береговой полосы  $M_2(t)$  оценить сложно, поэтому в набор контролируемых процессов  $I_2 = I$  она не входит. По аналогии с (4) перейдем от (1) к модели дискретного времени:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta M_1(k) = m_0(k) + m_u(k) - m_1(k) + \\ + \alpha_u^T \cdot u(k) + \lambda_2^T \cdot w_2(k)M_2(k) + \lambda_4 M_4(k) - \\ - (\alpha_1^T \cdot V_1(k) + \beta_1^T \cdot w_1(k) + \beta_4)M_1(k), \\ \Delta M_2(k) = -(\alpha_2^T \cdot V_2(k) + \lambda_2^T \cdot w_2(k))M_2(k) + \\ + \beta_1^T \cdot w_1(k)M_1(k), \quad k \in \{1..N\}, \quad t_k \in T_1. \end{array} \right. \quad (11)$$

Реализуемая ниже стратегия параметрического оценивания строится как итеративная с двумя циклами. Внутренний цикл  $i = \{1, 2, 3, \dots\}$  связан с методом оценивания модели нелинейной регрессии, внешний цикл  $j = \{1, 2, 3, \dots\}$  реализует схему настройки фильтров береговой полосы, как это было для “дна” (6), (8). Введем обозначения

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 = \alpha_2(j) - \delta\alpha_2(j), \\ \mathbf{x}_1(k) = -V_1(k)M_1(k), \quad \mathbf{x}_5(k) = -w_1(k)M_1(k), \\ \delta m_1(k) = -\Delta M_1(k) - m_1(k) + m_0(k) + m_u(k) - \beta_4 M_1(k), \end{array} \right. \quad (12)$$

на основании которых первое уравнение системы (11) принимает вид

$$\begin{aligned} \delta m_1(k) - \alpha_1^T \cdot \mathbf{x}_1(k) + \lambda_4 M_4(k) = \\ = -\lambda_2^T \cdot w_2(k)M_2(k) + \beta_1^T \cdot \mathbf{x}_5(k). \end{aligned} \quad (13)$$

Тогда с учетом (13) уравнение нефтезагрязненности береговой полосы можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Delta M_2(k) + \alpha_2^T \cdot V_2(k)M_2(k) = \\ = \delta m_1(k) - \alpha_1^T \cdot \mathbf{x}_1(k) + \lambda_4 M_4(k), \end{aligned} \quad (14)$$

а выражение (13) – в виде

$$\begin{aligned} \delta m_1(k) = \alpha_1^T \cdot \mathbf{x}_1(k) + \beta_1^T \cdot \mathbf{x}_5(k) - \\ - \lambda_4 M_4(k) - \lambda_2^T \cdot w_2(k)M_2(k). \end{aligned} \quad (15)$$

Представим  $\alpha_2 = \alpha_2(j) - \delta\alpha_2(j)$  и запишем (14) как

$$\begin{aligned} (\Delta + \alpha_2^T(j) \cdot V_2(k))M_2(k) = \delta m_1(k) - \alpha_1^T \cdot \mathbf{x}_1(k) + \\ + \delta\alpha_2^T(j) \cdot V_2(k)M_2(k) + \lambda_4 M_4(k). \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} M_2(k) = \delta m_1(j,k) - \alpha_1^T \cdot \mathbf{x}_1(j,k) + \delta\alpha_2^T(j) \cdot \mathbf{x}_2(j,k) + \\ + \lambda_4 M_4(j,k) + M_2(j,1)e_2(j,k) + \xi_2(j,k), \end{aligned} \quad (16)$$

где  $\alpha_2(j)$  – оценка параметров берега  $j$ -го приближения;  $M_2(j,1)$  – начальная загрязненность береговой полосы, а переменные  $\delta m_1(j,k)$ ,  $\mathbf{x}_1(j,k)$ ,  $M_4(j,k)$  и  $e_2(j,k)$  воспроизводятся по правилу:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Delta + \alpha_2^T(j) \cdot V_2(k))\delta m_1(j,k) = \delta m_1(k), \quad \delta m_1(j,1) = 0, \\ (\Delta + \alpha_2^T(j) \cdot V_2(k)) \cdot \mathbf{x}_1(j,k) = \mathbf{x}_1(k), \quad \mathbf{x}_1(j,1) = 0, \\ (\Delta + \alpha_2^T(j) \cdot V_2(k))M_4(j,k) = M_4(k), \quad M_4(j,1) = 0, \\ (\Delta + \alpha_2^T(j) \cdot V_2(k))e_2(j,k) = 0, \quad e_2(j,1) = 1. \end{array} \right. \quad (17)$$



Вектор  $\mathbf{x}_2(j, k)$ , удовлетворяющий уравнению  $(\Delta + \boldsymbol{\alpha}_2^T(j) \cdot \mathbf{V}_2(k) + \boldsymbol{\lambda}_2^T(j) \cdot \mathbf{w}_2(k)) \cdot \mathbf{x}_2(j, k) = \mathbf{V}_2(k)M_2(k)$ ,  $\mathbf{x}_2(j, 1) = \mathbf{0}$ ,

может быть сгенерирован лишь приближенно, если вместо неизмеряемой переменной  $M_2(k)$  использовать ее приближение, формируемое, согласно (16), выражением

$$\hat{M}_2(j, k) = \delta m_1(j, k) - \boldsymbol{\alpha}_1^T(j) \cdot \mathbf{x}_1(j, k) + \lambda_4(j)M_4(j, k) + M_2(j, 1)e_2(j, k), \quad (18)$$

в котором  $\boldsymbol{\alpha}_1(j)$ ,  $\lambda_4(j)$ ,  $M_2(j, 1)$  – оценки параметров  $j$ -го приближения (график  $M_2(k)$  приведен на рис. 2). В этом случае имеем

$$(\Delta + \boldsymbol{\alpha}_2^T(j) \cdot \mathbf{V}_2(k)) \cdot \hat{\mathbf{x}}_2(j, k) = \mathbf{V}_2(k)\hat{M}_2(k), \quad \hat{\mathbf{x}}_2(j, 1) = \mathbf{0}. \quad (19)$$

Подставляя  $M_2(k)$  в первое равенство (15), с учетом (12), (17), (19) переходим к искомой модели нелинейной регрессии:

$$\delta \hat{m}_1(k) = \boldsymbol{\alpha}_1^T \cdot \mathbf{x}_1(k) + \boldsymbol{\beta}_1^T \cdot \mathbf{x}_5(k) - \lambda_4 \hat{M}_4(k) - \times [\delta m_1(j, k) - \boldsymbol{\alpha}_1^T \cdot \mathbf{x}_1(j, k) + \delta \boldsymbol{\alpha}_2^T(j) \cdot \hat{\mathbf{x}}_2(j, k) + \lambda_4 M_4(j, k) + M_2(j, 1) e_2(j, k) + \xi_2(j, k)], \quad (20)$$

где  $\delta \hat{m}_1(k)$  – то же, что и в (12), но  $\beta_4$  заменено оценкой  $\hat{\beta}_4$ ;  $\xi_2(j, k)$  – ошибка, обусловленная заменами  $\mathbf{x}_2(j, k)$ ,  $M_2(k)$ ,  $\beta_4$  на их приближения с “крышками” ( $\hat{\mathbf{x}}_2(j, k)$ ,  $\hat{M}_2(k)$ ,  $\hat{\beta}_4$ ).

Пусть  $\boldsymbol{\lambda}_2(i, j)$  – оценка  $\boldsymbol{\lambda}_2(j)$  на  $i$ -й итерации внутреннего цикла. Тогда выражение (20) можно записать в квазилинейном регрессионном виде

$$\delta \hat{m}_1(k) = \mathbf{c}_2^T(j) (\mathbf{z}_1(j, k) + \boldsymbol{\lambda}_2^T(i, j) \cdot \mathbf{w}_2(k) \cdot \mathbf{z}_2(j, k)) + \xi_2(i, j, k) \quad (21)$$

с вектором искомых параметров

$$\mathbf{c}_2^T(j) = [\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\beta}_1 \quad \lambda_4 \quad \delta \boldsymbol{\alpha}_2(j) \quad \boldsymbol{\lambda}_2 \quad M_2(1)]$$

при назначенном  $\boldsymbol{\lambda}_2(i, j)$  и векторами регрессионных переменных

$$\mathbf{z}_1(j, k) = [\mathbf{x}_1(k) \quad \mathbf{x}_5(k) \quad -M_4(k) \quad 0 \quad -\mathbf{w}_2(k) \cdot \delta m_1(j, k) \quad 0]^T,$$

$$\mathbf{z}_2(j, k) = [\mathbf{x}_1(j, k) \quad 0 \quad -M_4(j, k) \quad -\hat{\mathbf{x}}_2(j, k) \quad 0 \quad -e_2(j, k)]^T,$$

$$\mathbf{z}_3(j, k) = \mathbf{z}_1(j, k) + \boldsymbol{\lambda}_2^T(i, j) \cdot \mathbf{w}_2(k) \cdot \mathbf{z}_2(j, k).$$

Ошибка  $\xi_2(i, j, k)$  отражает суммарное действие  $\xi_2(j, k)$  и неточного выставления параметров вектора  $\boldsymbol{\lambda}_2(i, j)$ . На основании (21) МНК оценка

$(i, j)$ -го приближения вектора  $\mathbf{c}_2(j)$  задается системой уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2(i, j) \cdot \mathbf{c}_2(i, j) &= \mathbf{b}_2(i, j), \\ \mathbf{F}_2(i, j) &= \sum_1^{N_1} \lambda_2(k) \cdot \mathbf{z}_3(i, j, k) \cdot \mathbf{z}_2^T(i, j, k), \\ \mathbf{b}_2(i, j) &= \sum_1^{N_1} \lambda_2(k) \cdot \mathbf{z}_3(i, j, k) \cdot \delta \hat{m}_1(k), \\ \lambda_2(k) &\geq 0, \quad \sum_1^{N_1} \lambda_2(k) = 1. \end{aligned} \quad (22)$$

В свете изложенного итеративная технология идентификации модели водная среда–берег (1) может быть представлена инструкцией следующего содержания.

#### Начало

1.  $I_2 = \langle m_0(k), m_1(k), m_u(k), \mathbf{u}(k), M_1(k), \hat{M}_4(k), \mathbf{V}_1(k), \mathbf{V}_2(k), \mathbf{w}_1(k), \mathbf{w}_2(k); k \in \{1 \dots N\} \rangle$  – ввод исходных данных.

2.  $\mathbf{c}_2^T(1) = [\boldsymbol{\alpha}_1(1) \quad 0 \quad \lambda_4(1) \quad 0 \quad \boldsymbol{\lambda}_2(1) \quad M_2(1, 1)]$   
 $\boldsymbol{\alpha}_2(1), \hat{\beta}_4$  – установка начальных настроек.

3.  $\mathbf{x}_1(k), \mathbf{x}_5(k), \delta m_1(k), k \in \{1 \dots N\}$  – вычисления согласно (12).

4.  $j = 1$  – начало внешнего цикла.

5.  $\delta m_1(j, 1) = 0, e_2(j, 1) = 1, \mathbf{x}_1(j, 1) = \mathbf{0},$

$\hat{\mathbf{x}}_2(j, 1) = \mathbf{0}$  – выставление начальных условий.

6.  $\delta m_1(j, k), \mathbf{x}_1(j, k), M_4(j, k), e_2(j, k), \hat{M}_2(j, k), \hat{\mathbf{x}}_2(j, k), k \in \{1 \dots N\}$  – генерация по правилам (17)–(19).

7.  $i = 1, \boldsymbol{\lambda}_2(i, j)$  – настройка внутреннего цикла.

8.  $\mathbf{z}_1(i, j, k), \mathbf{z}_2(i, j, k), k \in \{1 \dots N\}$  – формирование регрессоров в (21).

9.  $\mathbf{c}_2(i+1, j) = \mathbf{F}_2^{-1}(i, j) \cdot \mathbf{b}_2(i, j)$  – МНК-оценивание.

10. Если  $(\|\boldsymbol{\lambda}_2(i+1, j) - \boldsymbol{\lambda}_2(i, j)\| > \varepsilon_2)$ , то  $(i := i+1, \text{ на } 8)$ , иначе (продолжить) – условный переход по внутреннему циклу.

11.  $\boldsymbol{\alpha}_2(j+1) = \boldsymbol{\alpha}_2(j) - \delta \boldsymbol{\alpha}_2(i+1, j), \boldsymbol{\lambda}_2(j+1) = \boldsymbol{\lambda}_2(j), \mathbf{c}_2(j+1) = \mathbf{c}_2(i+1, j), \delta \boldsymbol{\alpha}_2(j+1) = 0$  – параметрическая коррекция на внешнем цикле.

12. Если  $(\|\mathbf{c}_2(j+1) - \mathbf{c}_2(j)\| > \varepsilon_2)$ , то  $(j := j+1, \text{ на } 5)$ , иначе (продолжить) – условный переход по внешнему циклу.

13.  $\hat{\mathbf{c}}_2 = \mathbf{c}_2(j+1), \hat{\boldsymbol{\alpha}}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2(j+1), \hat{\boldsymbol{\lambda}}_2(1) = \boldsymbol{\lambda}_2(j+1)$  – вывод результатов оценивания.

#### Конец

Работоспособность предложенного алгоритма идентификации проверялась на модели с параметрами из работы [Соловьев и др., 2008, с. 27, таблица] при шаге дискретизации  $\Delta t_2 = 1$  ч и периоде

наблюдения  $T_2 = [138 \div 267]$  день. Для простоты анализа источником постоянно действующего загрязнения выступает входной поток  $m_0(t)$  так, что  $\mathbf{u}(k) \equiv 0$ . Неопределенность нелинейных механизмов деструкции в воде и на берегу относилась к одному настроечному параметру в каждом уравнении. В итоге размерность вектора искомым параметров  $\mathbf{c}_2^T(j) = [\alpha_1 \ \beta_1 \ \lambda_4 \ \delta\alpha_2(j) \ \lambda_2 \ M_2(1)] \in \mathbf{R}^9$  сократилась до девяти.

Практика многовариантного вычислительного анализа работы алгоритма идентификации выявила ряд проблем, связанных с обеспечением условий сходимости процесса параметрической настройки. Стабильность оценивания по приведенной выше инструкции качественно улучшается, если в итеративной схеме оценивания модели нелинейной регрессии (п. 9) ввести регулировку шага, когда результирующая оценка  $\mathbf{c}_2(i+1, j)$  вычисляется по выражению

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_2(i+1, j) &= \kappa \mathbf{c}_2(i, j) + (1 - \kappa) \hat{\mathbf{c}}_2(i+1, j), \\ \hat{\mathbf{c}}_2(i+1, j) &= \mathbf{F}_2^{-1}(i, j) \cdot \mathbf{b}_2(i, j), \end{aligned} \quad (23)$$

где  $\kappa \in [0, 1]$  – параметр регулирования шага.

Результаты работы алгоритма при  $\kappa = 0,1$  иллюстрируются ниже. В этом случае обеспечивается сходимость процесса идентификации при трехкратном отклонении начального приближения от истинных значений (рис. 4, таблица).

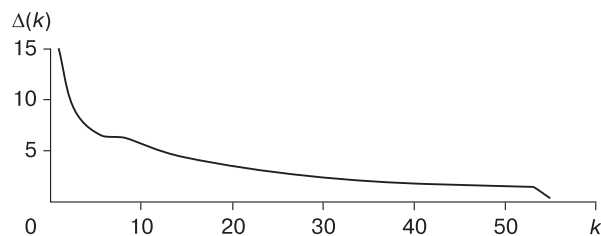


Рис. 4. Динамика среднеквадратического отклонения ( $\Delta$ ) оценок идентифицируемых параметров для модели “водная среда–берег”.

Работа алгоритма идентификации

Параметр	Истинное значение	Начальное приближение	Погрешность начального приближения, %	Результат идентификации	Погрешность идентификации, %
$\alpha_1$	$0,4 \cdot 10^{-3}$	$0,1 \cdot 10^{-3}$	75	$0,4 \cdot 10^{-3}$	0
$\lambda_4$	$0,2 \cdot 10^{-3}$	$0,6 \cdot 10^{-3}$	200	$0,2 \cdot 10^{-3}$	0
$\alpha_{21}$	$3 \cdot 10^{-6}$	$6 \cdot 10^{-6}$	100	$2,99 \cdot 10^{-6}$	0,3
$\alpha_{22}$	$8 \cdot 10^{-6}$	$16 \cdot 10^{-6}$	100	$8,03 \cdot 10^{-6}$	0,37
$\lambda_{21}$	$2,5 \cdot 10^{-5}$	$50 \cdot 10^{-5}$	1900	$2,5 \cdot 10^{-5}$	0
$\lambda_{22}$	$5 \cdot 10^{-6}$	$25 \cdot 10^{-8}$	95	$4,99 \cdot 10^{-6}$	0,2
$\lambda_{23}$	$3 \cdot 10^{-5}$	$8 \cdot 10^{-5}$	166	$2,99 \cdot 10^{-6}$	0,3
$M_2(1)$	292	800	173	291,2	0,27

Погрешность работы алгоритма определялась выражением  $\Delta(k) = \sum_{i=1}^9 \frac{|\mathbf{c}_2(i) - \hat{\mathbf{c}}_2(i)|}{\mathbf{c}_2(i)}$ . Приведенные результаты были достигнуты за 50 итераций внутреннего цикла и три итерации внешнего цикла.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В отличие от географических и региональных моделей, оперирующих годовыми циклами, представленная модель ориентирована прежде всего на задачи управления качеством поверхностных вод с суточной динамикой контроля.

Определение параметров географических моделей на основе лабораторных исследований затруднено ввиду сложности воспроизведения всего комплекса факторов, присутствующих в реальной среде. Преимущество представленной модели состоит в ее непосредственной привязке к рассматриваемой территории (водосбору) и следующей отсюда адекватности получаемых оценок.

В определенной степени настоящая статья формулирует требования к регламенту проведения замеров качества водной среды и донных отложений для создания модельных технологий контроля реального времени. Вопросы практической организации замеров и мониторинга требуют специального анализа.

**Условные обозначения** (подробнее см. в работе [Соловьев и др., 2008]): НЗ – нефтезагрязнитель;  $c_1(t)$ , кг/м<sup>3</sup> – средняя концентрация НЗ в водной среде камеры;  $c_0(t)$ , кг/м<sup>3</sup> – концентрация загрязнителя во входном потоке;  $Q_0(t)$ ,  $Q_1(t)$ , м<sup>3</sup>/ч – объемные расходы воды на входе и выходе камеры соответственно;  $\Theta_1(t)$ , °С – температура воды на годовом цикле;  $\Theta_2(t)$ , °С – температура поверхности береговой зоны;  $h(t)$ , м – уровень воды в водотоке;  $h_p(t)$ , м – уровень поверхностной влаги;  $e^{\downarrow}(t)$ , м – среднестатистическая балансовая составляющая;  $E(t)$  – функция сезонного снеготаяния (см. рис. 1);  $\beta_1$  – вектор, определяющий интенсивность действия функции приемистости берега (2-мерный);  $\mathbf{w}_1(t)$  – вектор составляющих функции приемистости берега (2-мерный);  $\beta_3$ , ч<sup>-1</sup> – коэффициент сорбции;  $\beta_4$ , ч<sup>-1</sup> – коэффициент действия гравитационной составляющей;  $\lambda_2$  – вектор, определяющий интенсивность действия функции интенсивности стока (4-мерный);  $\mathbf{w}_2(t)$  – вектор составляющих функции интенсивности стока (4-мерный);  $\lambda_3$ , ч<sup>-1</sup> – коэффициент, характеризующий интенсивность смыва НЗ с ледового покрова в воду;  $\lambda_4$ , ч<sup>-1</sup> – коэффициент, характеризующий интенсивность отдачи НЗ со дна в воду;  $\alpha_1$  – вектор, определяющий интенсивность действия функции биохимической деструкции НЗ в пределах

водной среды (4-мерный);  $\mathbf{V}_1(t)$  – вектор составляющих функции биохимической деструкции НЗ в пределах водной среды (4-мерный);  $\alpha_2$  – вектор, определяющий интенсивность действия функции биохимической деструкции НЗ в пределах береговой зоны (4-мерный);  $\mathbf{V}_2(t)$  – вектор составляющих функции биохимической деструкции НЗ в пределах береговой зоны (4-мерный);  $\alpha_3, \text{ч}^{-1}$  – коэффициент действия гравитационной составляющей;  $\alpha_4$  – вектор, определяющий интенсивность действия функции биохимической деструкции НЗ в пределах дна (4-мерный);  $\mathbf{V}_4(t)$  – вектор составляющих функции биохимической деструкции НЗ в пределах дна (4-мерный);  $\Theta_{10}, ^\circ\text{C}$  – лимитирующее значение функции;  $\bar{h}_p, \text{м}$  – лимитирующее значение функции;  $t_n$  – начальный момент времени;  $\mathbf{R}$  – множество действительных чисел;  $\delta\alpha_2$  – ошибка оценивания вектора  $\alpha_2$ ;  $\delta\alpha_4$  – ошибка оценивания вектора  $\alpha_4$ .

## Литература

- Бабушкин А.Г.** Гидрохимический мониторинг поверхностных вод Ханты-Мансийского автономного округа – Югры. Новосибирск, Наука, 2007, 152 с.
- Голуб Дж., Ван Лоун Ч.** Матричные вычисления. М., Мир, 1999, 548 с.
- Кюнж Ж.А., Холи Ф.М., Вервей А.** Численные методы в задачах речной гидравлики: практическое применение. М., Энергоиздат, 1985, 256 с.
- Малоземов В.Н., Певный А.Б.** Полиномиальные сплайны. Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1986, 120 с.
- Рябенский В.С.** Введение в вычислительную математику. М., Физматлит, 1994, 336 с.
- Соловьев И.Г., Пикиноров П.В., Шмелева Т.А.** Математические методы контроля нефтезагрязненности водотоков на месторождениях с длительными периодами ледостава. I. Модель // Криосфера Земли, 2008, т. XII, № 2, с. 25–31.
- Wei Yang, Jun Nan, Dezhi Sun.** An online water quality monitoring and management system developed for the Liming River basin in Daqing, China // J. Environ. Management, 2007, No. 87, p. 123–131.

*Поступила в редакцию  
1 июня 2007 г.*