

ФИЗИЧЕСКИЕ И ХИМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ  
В МЕРЗЛЫХ ПОРОДАХ И ВО ЛЬДУ

УДК 551.328/340/345;624.131

DOI: 10.15372/KZ20220304

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ОБЗОР ПОДХОДОВ И МЕТОДОВ  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ПРОМЕРЗАНИЯ  
И МОРОЗНОГО ПУЧЕНИЯ ГРУНТОВЕ.В. Сафронов<sup>1</sup>, В.Г. Чеверев<sup>1</sup>, А.В. Брушков<sup>1</sup>, С.Н. Булдович<sup>1</sup>, В.З. Хилимонюк<sup>1</sup>,  
Л.В. Григорьев<sup>2</sup>, Е.М. Макарычева<sup>2</sup>, Е.В. Гниломедов<sup>2</sup><sup>1</sup>Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,  
геологический ф-т, кафедра геокриологии, 119991, Москва, Ленинские горы, 1, Россия;  
evgenii567@yandex.ru, cheverev44@mail.ru, brouchkov@hotmail.com, ser\_bul@rambler.ru, vanda@geol.msu.ru<sup>2</sup>Научно-исследовательский институт трубопроводного транспорта (ООО “НИИ Транснефть”),  
отдел моделирования внешних воздействий и расчетов устойчивости объектов мониторинга,  
117186, Москва, Севастопольский просп., 47а, Россия;  
GrigorevLV@niitnn.transneft.ru, emakarycheva@gmail.com, GnilomedovEV@niitnn.transneft.ru

Аналитический обзор существующих подходов и конкретных моделей для решения задач промерзания, оттаивания и морозного пучения грунтов выполнен на основе анализа около 100 опубликованных работ российских и 100 работ иностранных авторов, включающих статьи, монографии, диссертации, патенты, труды конференций, научные отчеты. Особое внимание при анализе математических моделей уделено учету в них механизма тепло- и массопереноса, сегрегации льда, фазовых переходов поровой воды, формирования деформаций и сил морозного пучения промерзающих грунтов.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, процесс промерзания грунтов, фронт промерзания, морозное пучение, криогенная миграция, тепло- и массоперенос, фазовые переходы воды, усадка.

ANALYTICAL REVIEW OF APPROACHES AND METHODS  
OF MATHEMATICAL MODELING OF THE PROCESS  
OF FREEZING AND FROST HEAVING OF SOILSE.V. Safronov<sup>1</sup>, V.G. Cheverev<sup>1</sup>, A.V. Brouchkov<sup>1</sup>, S.N. Buldovich<sup>1</sup>, V.Z. Khilimonyuk<sup>1</sup>,  
L.V. Grigoriev<sup>2</sup>, E.M. Makarycheva<sup>2</sup>, E.V. Gnilomedov<sup>2</sup><sup>1</sup> Lomonosov Moscow State University, Faculty of Geology, Department of Geocryology,  
119991, Moscow, Leninskie Gory 1, Russia; cheverev44@mail.ru<sup>2</sup>Scientific Research Institute of Pipeline Transport (LLC “NII Transneft”),  
Department of External Impact Modeling and Stability Calculations of Monitoring Objects,  
Sevastopolsky prosp. 47a, Moscow, 117186, Russia

The article provides analytical review of existing approaches and specific models for solving problems of freezing, thawing and frost heaving of soils. The authors analyzed about 100 published works of Russian and 100 works of foreign authors, including articles, monographs, dissertations, patents, conference proceedings, scientific reports. Special attention in the analysis of the physical formulation of mathematical models is paid to taking into account the mechanism of heat and mass transfer, ice segregation, phase transitions of pore water, the formation of deformations and forces of frost heaving of frozen soils.

**Key words:** mathematical modeling, soil freezing, freezing front, frost heaving, cryogenic migration, heat and mass transfer, water phase transitions, shrinkage.

## ВВЕДЕНИЕ

Процесс промерзания грунтов – это прежде всего процесс теплового переноса и фазового перехода поровой воды в лед, поэтому для физической постановки математического моделирования

этого процесса необходимо решить тепловую задачу с фазовыми переходами и задачу теплового переноса в грунте. Для решения тепловой задачи базовым подходом является уравнение теплопровод-

ности Фурье. В трехмерном варианте оно может быть записано в виде [Тихонов, Самарский, 1999]

$$C\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right) + f(x,y,z,t), \quad (1)$$

где  $\lambda$  – теплопроводность, Вт/(м·К);  $T$  – температура, °С;  $t$  – время, с;  $f(x,y,z,t)$  – так называемая функция тепловых источников;  $C$  – удельная теплоемкость, Дж/кг;  $x, y, z$  – координаты, м;  $\rho$  – плотность материала, кг/м<sup>3</sup>.

Применение уравнения Фурье справедливо для непрерывной среды. При промерзании же грунта существует граница между талым и мерзлым состояниями, на которой фазовый состав воды может меняться скачкообразно. В этом случае можно говорить о границе раздела между талым и мерзлым грунтом с разными теплофизическими характеристиками, что накладывает на уравнение (1) дополнительное граничное условие.

Для решения тепловой задачи с четкой границей раздела жидкой и твердой фаз при наличии “скачка” влажности на границе используют классическую постановку задачи Стефана. Один из вариантов записи уравнения теплового баланса непосредственно на фронте промерзания приведен, например, в работе [Бровка, 1991]\*:

$$(w_{tot} - w_w)L\rho_d\frac{d\xi}{dt} = \lambda_U\left.\frac{dT}{dx}\right|_U - \lambda_F\left.\frac{dT}{dx}\right|_F, \quad (2)$$

где  $L$  – удельная теплота плавления льда, Дж/кг;  $\rho_d$  – плотность скелета мерзлого грунта, кг/м<sup>3</sup>;  $w_{tot}$  – общая весовая влажность, д.е.;  $w_w$  – удельное содержание незамерзшей воды в мерзлом грунте на фронте промерзания, д.е.;  $\frac{d\xi}{dt}$  – изменение толщины мерзлой части грунта во времени, м/с;  $\left.\frac{dT}{dx}\right|_U$ ,  $\left.\frac{dT}{dx}\right|_F$  – градиенты температур в талой и мерзлой зонах, К/м;  $\lambda_U, \lambda_F$  – теплопроводность грунта в талой и мерзлой зонах, Вт/(м·К).

Решение задачи Стефана с различными граничными условиями рассмотрено в работе [Общее мерзлотоведение, 1978], в том числе предложено обобщенное аналитическое решение данной задачи в [Гети, Мейрманов, 2000].

Применение уравнения Фурье для выделяемых зон грунта и уравнений теплового и материального баланса на границах этих зон позволяет наиболее полно описать процессы теплопереноса в задаче промерзания грунтов. Однако при реали-

зации численного решения этой задачи моделировать одновременно и непрерывную среду, и границы между зонами весьма затруднительно, прежде всего в связи с недостатками численных методов, применяемых при моделировании.

Для обеспечения устойчивого решения задач такого рода произошло разделение на два разных подхода. При *первом подходе* учитываются уравнения теплового и материального баланса на фронте промерзания, а также на других границах внутри грунта, в которых предполагается скачкообразное изменение свойств при сохранении непрерывности температурного поля.

При *втором подходе* проводится сглаживание скачкообразного изменения фазового состава и теплофизических свойств грунта на границах зон. Например, одним из признанных методов достижения однородности является так называемая энтропийная формулировка задачи Стефана [Основы..., 1999]. В нем все переменные, входящие в уравнение (1) и (2), в том числе температура, рассматриваются как функции от энтропии. Энтропия, в свою очередь, становится функцией не только температуры, как в талой и мерзлой частях, но и координаты границы фронта промерзания. В этом случае границы как бы “размываются”, а уравнение теплового баланса на фронте вырождается в решение модифицированного уравнения Фурье.

Условно группу моделей, в которых применяется первый подход, назовем моделями с выраженным фронтом, или фронтовыми моделями, а вторую – моделями с “размытым фронтом”, или бесфронтовыми.

Основной целью создания моделей промерзания грунтов является решение различных геотехнических задач в криолитозоне, при которых моделируется поле напряжений, создаваемое различными строительными объектами, а также предлагается прогноз поведения температурного поля и возможных деформационных изменений. Учитываются гидрологические условия и дается прогноз влияния различных водных источников на процесс деформации строительных сооружений либо природных явлений.

Поэтому, кроме решения непосредственно тепловой задачи, при промерзании в связи с процессами пучения возникла потребность в уравнениях массопереноса и решения задачи переноса воды и солей совместно с тепловой энергией. В случае решения инженерных задач необходимо добавить к этим уравнениям уравнения напряженно-деформационного состояния грунта или модифицировать уравнения тепло- и массопереноса таким об-

\* В статье условные обозначения одних и тех же величин не всегда совпадают, как у российских, так и у зарубежных авторов. Авторы статьи решили сохранить эти обозначения в оригинале, но дать их расшифровку.

разом, чтобы они могли учитывать воздействие внешней нагрузки.

При моделировании влагопереноса в мерзлой части промерзающих грунтов исследователи опирались на представления о влагопереносе в талых грунтах. Это привело к двум разным подходам в решении задачи влагопереноса. В *одном подходе* исследователи опираются на зависимости потока воды в грунтах от градиента влажности, распространяя этот подход для мерзлых грунтов (влажностная форма). В *другом подходе* рассматривается зависимость интенсивности влагопереноса от градиента порового давления.

Следует подчеркнуть, что влагоперенос в мерзлом грунте прежде всего вызывается градиентом температур в нем. Соответственно, возникла необходимость выразить градиент температур через градиент давления внутри пор мерзлого грунта для создания единого поля давления, определяющего поток воды как в талой, так и в мерзлой частях. При этом в моделях применяются различные уравнения связи между поровым давлением и температурой, что приводит к дополнительному различию между моделями в подходе, в котором рассматривается зависимость интенсивности влагопереноса от градиента порового давления.

## ОБЗОР ФРОНТОВЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

### Модель Меламеда и Фельдмана

В.Г. Меламедом [1969] и позднее Г.М. Фельдманом [1988] были представлены модели, учитывающие влагопоток при решении задачи Стефана. Для решения задачи В.Г. Меламедом принято наличие влагопереноса в талой зоне и его отсутствие в мерзлой зоне, а также то, что сегрегационное льдовыделение происходило только на границе промерзания. С математической точки зрения постановка задачи теплообмена в промерзающем грунте была безупречна, однако физическая постановка задачи влагопереноса и сегрегационного льдовыделения имела принципиальный недостаток, из-за которого математическая модель не дала достоверных результатов.

Дело в том, что для запуска криогенной миграции и образования потока воды к фронту промерзания грунта в качестве движущей силы авторы расчетных моделей использовали градиент влажности, а не градиент потенциала влаги (или его эквивалент – градиент гидравлического порового давления). Такая физическая постановка задачи для математического моделирования, как показали дальнейшие многочисленные экспериментальные исследования, не отвечала физической сущности процесса криогенной миграции и морозного пучения грунтов [Кудрявцев и др., 1973; Чеве-рев и др., 2021].

### Модели, построенные на базе концепции промерзающего слоя

При описании работ Конрада, Миллера и других зарубежных авторов по решению задачи промерзания грунта, базирующихся на рассмотрении градиента порового давления в качестве движущей силы и концепции существования особого промерзающего слоя, следует уточнить, что именно они моделировали. В этих работах авторы пытались описать процесс формирования шлировой криогенной текстуры при промерзании грунта, а также учесть влияние внешней нагрузки на процессы. В ходе промерзания они наблюдали за формированием периодических массивных ледяных шлиров, расположенных поперечно тепловому потоку и перекрывающих влагоперенос в грунте. В этом случае скорость изменения толщины такого шлира можно было легко измерить, а следовательно, посчитать величину потока воды, поступающего на такой шлир.

Р. Миллером была предложена концепция промежуточного (далее – промерзающего) слоя непосредственно за фронтом промерзания до первого перед фронтом ледяного шлира. Он обосновал, что в области температур ниже температуры начала замерзания в некоторой узкой области будут существовать такие условия, при которых часть пор будет заполнена льдом, а часть – переохлажденной (незамерзшей. – Прим. авторов) водой, не способной превратиться в лед из-за малых размеров самой поры [Miller, 1978]. Градиент температур в этом слое будет пропорционален градиенту давления переохлажденной воды в порах и будет определять величину потока воды, поступающей к ледяному шлиру, находящемуся сразу за этим слоем.

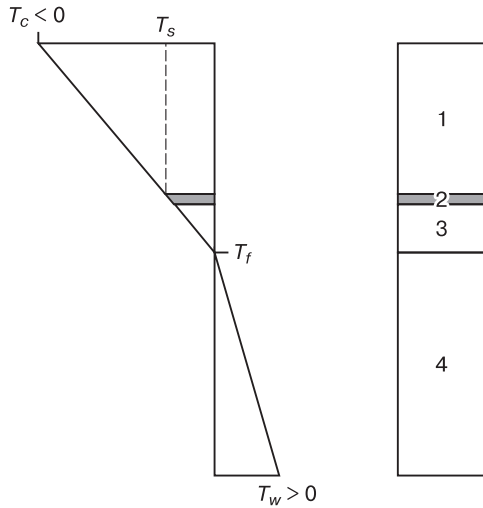
### Модель Конрада и Моргенштерна

Авторами в работе [Konrad, Morgenstern, 1980] теоретически обосновано и эмпирически подтверждено, что поток влаги в промерзающих грунтах прямо пропорционален градиенту температуры мерзлой зоны. В последующих работах коэффициент пропорциональности между ними Конрад назвал потенциалом сегрегации (аналог коэффициента влагопроводности. – Прим. авторов). Уравнение массопереноса, предложенное Конрадом, может быть записано в виде

$$v_u = SP \text{ grad } (T_f), \quad (3)$$

где  $SP$  – потенциал сегрегации,  $\text{м}^4/(\text{К}\cdot\text{с})$ ;  $v_u$  – расход воды (изменение объема воды в единицу времени, поступающего к ледяному шлиру),  $\text{м}^3/\text{с}$ ;  $\text{grad } (T_f)$  – градиент температуры в мерзлой зоне образца,  $\text{К}/\text{м}$ .

В качестве основы Конрад использовал сравнительно простую модель, в которой рассматривал две зоны: талую и мерзлую, разделенные фронтом промерзания (рис. 1).



**Рис. 1. Имитационная модель морозного пучения [Konrad, Morgenstern, 1980].**

1 – мерзлый слой, 2 – ледяной шпир, 3 – промерзающий слой, 4 – талый слой.  $T_c$  – температура на границе мерзлого слоя,  $T_s$  – температура на границе ледяного шпира,  $T_f$  – температура на фронте промерзания,  $T_w$  – температура на границе талого слоя.

Градиент температуры в промерзающем слое он принимал равным градиенту температуры в мерзлом слое. В качестве теоретического обоснования автор использовал уравнение Клапейрона–Клаузиуса для связи между давлением незамерзшей воды в порах промежуточного слоя и градиентом температур в нем. Подход Дж.М. Конрада с соавторами приобрел за рубежом большую популярность. На базе этой эмпирической концепции построена, например, модель [Loranger, 2020], в которой к уравнениям (2) и (3) добавляется выделение тепла за счет замерзания воды, поступающей путем криогенной миграции:

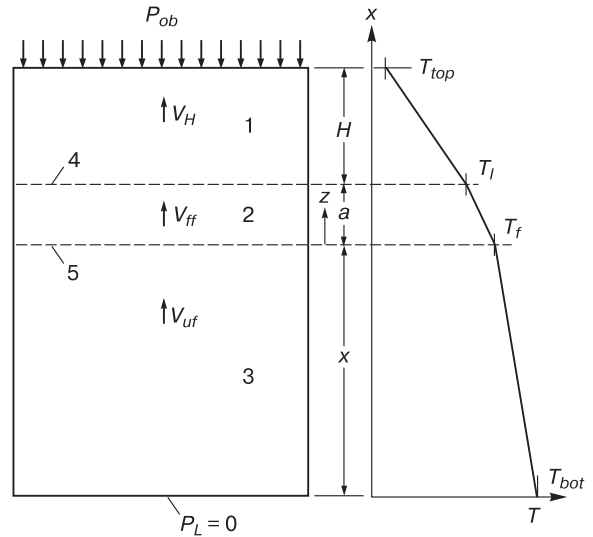
$$\lambda_f \nabla T_- = \lambda_u \nabla T_+ + L_s \frac{\Delta z}{\Delta t} + L_w v,$$

где  $\lambda_f, \lambda_u$  – теплопроводность мерзлой и талой зон соответственно;  $\nabla T_-, \nabla T_+$  – градиенты температур мерзлой и талой зон;  $L_s$  – объемная скрытая теплота замерзания воды на фронте замерзания;  $L_w$  – объемная скрытая теплота замерзания воды на контакте ледяного шпира;  $\Delta z/\Delta t$  – скорость движения фронта промерзания.

Применение такой концепции позволяло описывать процесс промерзания с медленным движением фронта при малых градиентах температур.

### Модель Джилпина

В своих работах Дж.М. Конрад и соавторы показали, что поток воды, рассчитанный через градиент давления на фронте промерзания, как минимум на порядок превышает наблюдаемый в физическом эксперименте. В работе [Gilpin, 1980] для



**Рис. 2. Имитационная модель морозного пучения с определением величин [Gilpin, 1980].**

1 – мерзлый слой, 2 – промерзающий слой, 3 – немерзлая (таялая) зона, 4 – фронт сегрегации льда, 5 – фронт промерзания.  $T$  – температура,  $z$  – расстояние,  $H$  – толщина мерзлого слоя,  $a$  – толщина промерзающего слоя,  $T_{bot}$  – температура теплой границы,  $T_f$  – температура на фронте промерзания,  $T_l$  – температура на фронте сегрегации льда,  $T_{top}$  – температура холодной границы,  $P_{ob}$  – механическое давление на холодной границе,  $P_L$  – поровое давление на теплой границе,  $V_H$  – скорость роста шпира льда,  $V_{ff}$  – скорость потока воды в промерзающем слое,  $V_{uf}$  – скорость потока воды в незамерзшей зоне.

решения данного противоречия автор предложил учесть возможность формирования градиента температур в промерзающем слое, отличного от градиента в остальном мерзлом грунте, и рассмотрел уравнение теплового баланса непосредственно на границе промерзающего слоя и ледяного шпира (рис. 2):

$$k_f \frac{T_{top} - T_l}{H} - k_p \frac{T_f - T_l}{a} = \frac{L}{v_s} V_H,$$

$$k_p \frac{T_f - T_l}{a} - k_{uf} \frac{T_{bot} - T_f}{x} = \rho_d L \frac{dz}{dt},$$

где  $k_f, k_p, k_{uf}$  – коэффициенты теплопроводности мерзлого и промерзающего слоев и талой зоны соответственно, Вт/(м·К);  $V_H$  – скорость роста шпира льда, м/с;  $T_{top}$  – температура на холодной границе, К;  $T_l$  – температура на границе мерзлого и промерзающего слоев (или, иначе, на границе образования сплошного прослоя льда), К;  $T_f$  – температура на фронте промерзания, К;  $T_{bot}$  – температура на границе со стороны источника тепла, К;  $v_s$  – удельный объем льда, м<sup>3</sup>/кг.

Р. Джилпин [Gilpin, 1980] ввел значительное упрощение, приняв профиль температур в промерзающем слое линейным, и не рассматривал процесс замерзания грунта в этом слое и взаимо-



действия образующегося льда в нем с ледяным шпиром (между тем профиль температур выгибается плавно [Ершов, 1999]).

В работе [Bronfenbrener, Bronfenbrener, 2010] приводится аналитическое решение этой тепловой задачи. Авторы используют преобразование пространственных и временных координат и приводят аналитическое решение для кратко- и долгосрочного прогноза промерзания.

В рамках модели Джилпина рассматривались лишь граничные условия между талым и промерзающим слоями, промерзающим слоем и формирующимся ледяным шпиром. В этой работе не рассматривались процессы тепло- и влагопереноса непосредственно в промерзающем слое. Кроме того, не была раскрыта проблема воздействия на каплю льда в промерзающем слое льда на находящийся за этим слоем ледяной шпир; скорость миграции этого льда к ледяному шпирю определяет скорость его роста. Концепция переноса воды в этом слое была подробно рассмотрена в [O'Neill, Miller, 1985]. Основные идеи работы заключаются в следующем. Промерзающий слой рассматривался исключительно между талой зоной и первым ледяным шпиром. Если внутри промерзающего слоя возникал ледяной шпир, то его протяженность автоматически сокращалась до нового шпира. Таким образом, выполнялось условие, чтобы внутри этой зоны шпир отсутствовал, а сама эта зона состояла исключительно из незамерзшей воды идвигающегося к новому шпирю льда-цемента, жестко соединенного с этим ледяным шпиром (т. е. скорость движения льда-цемента совпадала со скоростью роста шпира).

Давление воды может быть вычислено из обобщенного уравнения Клапейрона–Клаузиуса:

$$(P_w - P_0)V_w - (P_i - P_0)V_i = L \frac{\Delta T}{T_0}, \quad (4)$$

где  $V_w$ ,  $V_i$  – удельный объем воды и льда соответственно, м<sup>3</sup>/кг;  $P_i$ ,  $P_w$  – давление ледяных включений и незамерзшей воды, Па.

Поскольку, согласно утверждению авторов, рост ледяных шпиров определяется скоростью движения льда-цемента, выражение плотности миграционного потока через градиент давления жидкой фазы в соответствии с законом Дарси выполняться не будет. Поэтому в качестве движущей силы авторы рассматривают градиент суммарного порового давления  $P_n$ , определяющего скорость роста шпира, который может быть рассчитан по формуле

$$P_n = \chi P_w + (1 - \chi) P_i, \quad (5)$$

где  $\chi$  – параметр, зависящий от содержания незамерзшей воды.

В работе решаются уравнения теплового баланса на базе уравнения Фурье с учетом выделе-

ния тепла за счет вымерзающей воды и баланса масс, где поток воды определяется градиентом порового давления.

Идеи Р. Миллера были реализованы в упрощенной модели, в которой рассматривается водонасыщенная система, состоящая из сплошной пористой недеформируемой среды (капиллярно-пористой керамики) и формирующейся ледяной линзы на холодной поверхности керамического цилиндра [Горелик, Колунин, 2002]. В этой работе авторы провели эксперимент, в котором использовали образец пористой керамики, который подходит на роль постоянной нерасширяемой среды. С одной стороны керамического цилиндра подводилась вода, а с другой был источник холода под нагрузкой и рос ледяной шпир.

В своем решении Я.Б. Горелик использует условие Стефана на фронте промерзания и на границе раздела пористого тела и линзы. Для определения влагопереноса автор, как и Р. Миллер, применяет градиент внутриводного давления, определяемый из обобщенного уравнения Клапейрона–Клаузиуса. Скорость роста ледяной линзы определялась исходя из скорости движения фронта промерзания на границе раздела пористое тело – лед.

Вопрос использования уравнения Клапейрона–Клаузиуса в промерзающей зоне остается открытым и оспариваемым. В работе [Akagawa et al., 2006] авторы указывают на то, что формирование ледяной линзы в грунте в самом моменте зарождения происходит как в закрытой системе, до тех пор, пока давление, оказываемое ею на грунт, не превзойдет величину нагрузки на образец и предел прочности грунта на разрыв. После того как этот разрыв произойдет, величина давления, оказываемая ледяной линзой на поровую воду, резко падает и условие закрытой системы нарушается, что приводит к резкому, скачкообразному росту шпиров льда.

В работе [Ma et al., 2015] предлагается функция распределения нагрузки при росте ледяной линзы в зависимости от степени кольматации пор льдом в промерзающей зоне. В целом оценка влияния давления ледяной линзы при ее росте неоднозначна у разных авторов.

### Модель Чеверева–Булдовича

Уравнения (4) и (5) применимы прежде всего либо для замкнутой, либо как минимум нерасширяемой среды, что практически не соблюдается в грунтах. В работах [Ершов, 1999; Чеверева, 1999, 2003а,б, 2004; Чеверева, Сафронов, 2012; Чеверева и др., 2013, 2021] для описания зависимости порового давления от температуры используется уравнение Эдлефсена–Андерсена [Edlefsen, Anderson, 1943]:

$$P_w = L \Delta T / (T_0 V_w),$$

где  $P_w$  – равновесное давление жидкой фазы воды грунта на границе с твердой фазой, Па;  $L$  – удельная теплота плавления льда, Дж/кг;  $\Delta T$  – понижение температуры начала замерзания грунта (порового раствора) относительно замерзания несвязанной воды;  $T_0$  – абсолютное значение температуры замерзания свободной воды, К;  $V_w$  – удельный объем воды, м<sup>3</sup>/кг.

В этом случае плотность потока воды в мерзлом грунте будет определяться градиентом температуры [Ершов, 1999; Чеверев, 1999]:

$$i_w = \lambda_w(T) K \frac{dT}{dz}, \quad (6)$$

где  $i_w$  – плотность потока воды (вектор, направленный в сторону градиента температуры со значением, равным изменению объема воды за единицу времени, проходящей через единицу площади), м/сут;  $\lambda_w(T)$  – коэффициент влагопроводности мерзлой зоны грунта, м/сут;  $K = L/(T_0 V_w)$  – коэффициент пропорциональности, выраженный в метрах водяного столба на градус Кельвина и равный 120 м/К;  $dT/dz$  – градиент температуры в промерзающей зоне.

Плотность потока воды в талой зоне составляет

$$i_w = \lambda_w KL \frac{T_{nz} - T_\xi}{l - \xi},$$

где  $T_{nz}$ ,  $T_\xi$  – температура начала замерзания грунта и температура на фронте промерзания;  $\xi$  – глубина промерзания;  $l$  – размер расчетной области.

В плане развития модели Чеверева–Булдовича осуществлено численное решение задачи на базе метода конечных элементов и метода конечных разностей [Чеверев, Сафронов, 2012]. Решение основано на расчете величины плотности потока с использованием уравнения (6). При этом для нахождения  $T_\xi$  используется не аналитическое решение уравнений тепло- и массопереноса, как в модели Чеверева–Булдовича, а численное решение за счет отслеживания влажности на фронте промерзания при решении уравнений баланса масс:

$$dT_\xi = \frac{dW_\xi}{dW/dT},$$

где  $W_\xi$  – содержание незамерзшей воды на фронте промерзания;  $\frac{dW}{dT}$  – производная от функции содержания незамерзшей воды от температуры в точке  $T_\xi$ .

### ОБЗОР БЕСФРОНТОВЫХ МОДЕЛЕЙ

Система уравнений влагопереноса, решаемая относительно влажности, – один из широко распространенных подходов для моделирования процессов промерзания в грунтах. Общая система уравнений тепло- и влагопереноса во влажност-

ной форме была сформулирована для строительных капиллярно-пористых материалов в работе [Лыков, Михайлов, 1963]:

$$C_p \frac{dT}{dt} = -\operatorname{div}(I_q) - \sum_{i=0}^4 (H_i T_i - C_i I_{mi} \Delta T),$$

$$\frac{d(\rho_0 W_i)}{dt} = -\operatorname{div}(I_{mi}) + \sum_{i=0}^4 I_i,$$

$$\frac{d(\rho_0 W_w)}{dt} = -\operatorname{div} \sum_{i=0}^4 I_{mi},$$

где  $C_p$  – объемная теплоемкость грунта, складываемая из объемных долей теплоемкостей компонентов, Дж/м<sup>3</sup>;  $\rho_0$  – плотность грунта, кг/м<sup>3</sup>; индексом, например,  $i$  обозначены компоненты грунта: минеральный скелет, воздух, вода и лед, и рассматриваются величины этих компонентов:  $I_q$  – удельный поток тепла, Дж/(кг·м<sup>2</sup>);  $I_{mi}$  – удельный поток вещества, кг/(м<sup>2</sup>·с);  $I_i$  – мощность стока, Дж/(кг·м<sup>2</sup>);  $C_i$  – теплоемкость, Дж/(кг·К);  $H_i$  – энтальпия, Дж/кг;  $W_i$ ,  $W_w$  – льдистость и влажность, д.е. Величина плотности потока воды ( $I_w$ , кг/(м<sup>2</sup>·с)) в одномерном случае определяется градиентом влажности. Ниже рассмотрены примеры моделей, использующих такой подход.

#### Модель Лаврова

Основная сложность при построении численных моделей без выделения талой и мерзлой зон – это выбор общей для обеих зон переменной в системе уравнений тепло- и влагопереноса. В работе [Лавров, 2000] в качестве такой величины была взята общая влажность грунта. Для решения уравнения теплового баланса рассматривалось уравнение Фурье с учетом фазовых переходов за счет незамерзшей воды (1). Для уравнения материального баланса в мерзлой зоне в качестве движущей силы автор градиент содержания незамерзшей воды выражает через льдистость и общую влажность:

$$\frac{dW}{dT} = \frac{d}{dx} \left( D_w \frac{dW}{dx} \right) + \frac{d}{dx} \left( D_p \frac{dP}{dx} \right) + \frac{d}{dx} \left( D_l \frac{dI}{dx} \right), \quad (7)$$

где  $W$  – общая влажность, д.е.;  $D_w$ ,  $D_p$ ,  $D_l$  – соответствующие коэффициенты диффузии за счет градиентов незамерзшей воды, давления и льда;

$I$  – льдистость;  $\frac{dP}{dx}$  – градиент давления в системе, заданный внешним напором.

Тепловая задача решается отдельно от задачи массопереноса, для каждой из них записаны индивидуальные уравнения, определяющие поведение системы в целом.

#### Модель Даниэляна и Яницкого

В работе [Даниэляна, Яницкий, 1983] авторы использовали две переменные: влажность за счет

незамерзшей воды и льдистость. Они рассматривали процесс замерзания с учетом эффектов кинетики фазового перехода воды в промерзающем грунте. Уравнение теплового баланса основывается на уравнении Фурье с учетом вымерзания воды и соответственно льдонакопления, массоперенос – на базе уравнения (7) без учета влияния внешнего напора. Скорость льдонакопления определялась из уравнения

$$\frac{dI}{dt} = a(W - W_{\text{нз}}),$$

где  $\frac{dI}{dt}$  – скорость льдонакопления, является функцией влажности и направления процесса плавления льда или кристаллизации воды;  $W_{\text{нз}}$  – содержание незамерзшей воды;  $a$  – коэффициент пропорциональности, полученный авторами эмпирически и зависящий от реологических свойств мерзлых грунтов.

Подход Даниэляна–Яницкого, по-видимому, один из самых интересных с точки зрения обеспечения непрерывности решения задачи, поскольку задаются критерии формирования льда и временные функции его появления. Предполагается, что лед как бы “запаздывает” при кристаллизации, и это запаздывание задает процесс кристаллизации льда и вымерзания влаги в широкой зоне, а не только на границе.

### Модель Ли

Двумерный вариант задачи массопереноса исключительно в мерзлом грунте представлен в работе [Li et al., 2013]. Для определения миграции влаги авторы выражают градиент влажности через градиент температур:

$$I_w = \rho_0 D \frac{dW}{dx} = \rho_0 D \frac{dW}{dT} \frac{dT}{dx},$$

где  $D$  – коэффициент диффузии воды в грунте.

Авторы используют уравнение Фурье с учетом миграции воды и фазовых переходов за счет незамерзшей воды:

$$\left( c\rho + L\rho_w \frac{dW}{dT} \right) \frac{dT}{dt} = \left( k_x + L\rho_w \frac{dW}{dT} D_x \right) \frac{dT}{dx} + \left( k_y + L\rho_w \frac{dW}{dT} D_y \right) \frac{dT}{dy},$$

где  $k_x, k_y$  – коэффициенты теплопроводности;  $D_x, D_y$  – коэффициенты диффузии;  $\rho$  – плотность грунта;  $c$  – теплоемкость грунта;  $\rho_w$  – плотность воды.

### Модели на базе пористости

#### Модель Михайловского и Джу

В работе [Michalowski, Zhu, 2006] приводится модель, в которой предлагается решение тепловой

задачи на базе модифицированного уравнения Фурье для мерзлого грунта:

$$C \frac{dT}{dt} - L \frac{d\theta_i}{dt} \rho_i - \nabla(\lambda \nabla T) = 0,$$

где  $\nabla$  – условное обозначение градиента;  $\theta_i$  – объемная доля льда.

Основная идея модели – попытка выразить все основные коэффициенты, входящие в уравнение теплового баланса и баланса масс, через пористость грунта, поскольку при накоплении льда меняется прежде всего пространственная геометрия распределения минеральных частиц. Так, объемная доля льда  $\theta_i$  рассчитывается по формуле

$$\theta_i = \frac{V_i}{V} = n(1-v),$$

где  $V$  – общий объем грунта;  $V_i$  – объем льда;  $n$  – пористость грунта;  $v$  – объемная доля незамерзшей воды по отношению к общему объему незамерзшей воды и льда в грунте:

$$v = \frac{V_w}{V_w + V_i},$$

где  $V_w$  – объем незамерзшей воды;  $V_i$  – объем льда.

Зависимость пористости от температуры характеризуется некоторым максимумом и задается уравнением

$$n = n_m \left( \frac{T - T_0}{T_m} \right)^2 \exp \left[ 1 - \left( \frac{T - T_0}{T_m} \right)^2 \right],$$

где  $n$  – пористость грунта;  $n_m$  – максимальная пористость;  $T_0$  – температура начала замерзания;  $T_m$  – температура при максимуме пористости;  $T$  – текущая температура.

Уравнение материального баланса решается относительно пористости грунта:

$$(\rho_i - \rho_s) \frac{dn}{dt} + (\rho_w - \rho_i) \frac{d(nv)}{dt} - \rho_w \nabla(\nabla h) = 0,$$

где  $\rho_i, \rho_w, \rho_s$  – плотности льда, воды и минеральных частиц соответственно;  $h$  – напор воды, м.

Из более новых следует отметить работу [Ming et al., 2016], где на базе этого подхода предложено решение с учетом напряженно-деформационного состояния грунта и пористости. Авторы рассматривают общую деформацию грунта как сумму температурного расширения, упругой деформации и деформации за счет изменения пористости грунта. В работе [Ming et al., 2016] предлагается уравнение напряженного состояния

$$d\sigma = -dE_s \varepsilon^e = -dE_s [\varepsilon - \varepsilon^T - \varepsilon^c],$$

где  $\sigma$  – напряжение;  $E_s$  – модуль упругости;  $\varepsilon^e$  – упругая деформация;  $\varepsilon^T$  – деформация за счет температурного расширения;  $\varepsilon^c$  – деформация

ползучести;  $\varepsilon$  – общая деформация, которую можно описать за счет изменения пористости формулой

$$\varepsilon = \frac{n_0 - n}{1 - n},$$

где  $n_0$  – начальное значение пористости;  $n$  – ее текущее значение.

В работе [Abdalla et al., 2014] предлагается также усовершенствование зависимости функции пористости от температуры для талой части и, кроме того, учет зависимости теплопроводности как функции от температуры и пористости с учетом направления промерзания или оттаивания.

В работе [Li et al., 2018] предлагается решение задачи массопереноса при неполном водонасыщении (т. е. учитывается влияние воздуха на процесс влагопереноса). Кроме того, в этой работе предлагается решение механической задачи. В отличие от предыдущей работы общая деформация рассматривается как сумма упругой деформации, вязкопластичной и деформации за счет морозного пучения, которая, в свою очередь, зависит от пористости. Напряженно-деформационное состояние в работе решается посредством представления общей деформации в виде суммы деформаций за счет упругого взаимодействия, деформации пучения и вязкопластичной деформации. Поскольку напряжения в грунте, согласно [Li et al., 2018], возникают за счет упругого взаимодействия, упругую составляющую выражают через разницу между общей суммарной деформацией, деформацией за счет пучения и вязкопластичной деформацией:

$$\{\Delta\sigma\} = [D_T] \left( \{\Delta\varepsilon\} - \{\Delta\varepsilon_{vp}\} + \{\Delta\varepsilon_{fh}\} \right),$$

где  $\sigma$  – напряжение;  $D_T$  – модуль упругости;  $\varepsilon$  – общая деформация;  $\varepsilon_{vp}$  – вязкопластичная деформация;  $\varepsilon_{fh}$  – деформация пучения, определяемая по формуле:

$$\Delta\varepsilon_{fh}^V = \theta_i^{t+\Delta t} + \theta_w^{t+\Delta t} - n_s^t,$$

где  $\theta_i, \theta_w$  – объемные доли льда и незамерзшей воды;  $n_s$  – пористость.

#### Модель Павлова, Пермякова и Романова

Перенос растворенной в воде соли в грунте определяется законом Фика:

$$I_c = D_c \frac{dC}{dx},$$

где  $I_c$  – плотность потока ионов;  $C$  – их концентрация;  $D_c$  – коэффициент диффузии.

В работах [Павлов, Пермяков, 1983; Пермяков, Романов, 2000] рассматривается двумерная модель солепереноса, позволяющая моделировать двумерное распределение соли в грунтах. В модели предполагается отжатие солей из мерзлой зоны при промерзании. Для этого рассматривается задача, учитывающая только кондуктивные источ-

ники тепла, а солеперенос определяется только концентрацией соли по закону Фика:

$$\frac{dC}{dt} = \frac{d}{dx} \left( D \frac{dC}{dx} \right) + \frac{d}{dy} \left( D \frac{dC}{dy} \right).$$

#### Модель Попова

Сопряжение процесса влагопереноса с солепереносом наиболее полно рассмотрено в работе [Понов, 2006]. Автор учитывает термоградиентный эффект, адсорбцию ионов в диффузионном слое, перекрестное движение влаги и соли и захват солей при кристаллизации льда в порах. Им предлагается система уравнений теплового и материального баланса:

уравнение Фурье с учетом конвективного переноса влаги

$$C_p \frac{dT}{dt} = - \frac{d}{dx} \left[ \lambda \frac{dT}{dx} + c\rho_0 T J_w \right],$$

уравнение баланса влаги

$$\frac{dW}{dt} = - \frac{d}{dx} J_w - I_f,$$

общее уравнение баланса влаги и соли

$$\frac{d(WC)}{dt} = - \frac{d}{dx} \left[ W D_c \frac{dC}{dx} + C J_w \right] - k_z C I_f - I_a,$$

формула для расчета общего потока воды

$$J_w = -K \frac{dW}{dx} + K \delta_{CW} \frac{dC}{dx} - K \delta_{TW} \frac{dT}{dx} + V_f,$$

где  $I_f$  – отток воды за счет ее кристаллизации;  $I_a$  – отток соли за счет адсорбции ионов диффузионным слоем;  $J_w$  – поток воды;  $K$  – коэффициент диффузии;  $K \delta_{CW} \frac{dC}{dx}$  – составляющая потока воды за счет перекрестного потока соли;  $K \delta_{TW} \frac{dT}{dx}$  – составля-

ющая за счет термоградиентного эффекта; величина  $k_z C I_f$  определяет захват соли при кристаллизации льда;  $V_f$  – скорость фильтрации воды, вызванная градиентом напора.

#### Термомеханические модели

Общей чертой термомеханических моделей является попытка описать совместные уравнения тепло- и массопереноса при помощи уравнения напряженно-деформационного состояния грунта.

#### Модель Гречищева

В работе [Гречищев, 1983] рассматривается грунт как фильтрационно-консолидационная среда. Для описания теплового баланса для мерзлой и талой зон С.Е. Гречищев использовал уравнения Фурье. В модели описаны уравнения фильтрационной консолидации, связывающие давление в грунте с напряженно-деформационным состоянием, а также скорости потока воды в нем. В модели



рассматривается фазовое равновесие сообщающихся мелких и крупных пор, при этом рассматривается уравнение Клапейрона–Клаузиуса, для крупной поры учитывается напряжение на матрицу порового льда. Из этого равновесия определяются поля температур. В модели в уравнениях фазового равновесия учитывается кинетика массопереноса и движения фронта промерзания.

### Модель Разбегина

В.Н. Разбегиным решается тепловая задача с границей промерзания, где выделяются три зоны: талая, мерзлая и промерзающая [Разбегин, 1983]. При этом для задания уравнений теплового баланса для талой и мерзлой зон использовано уравнение Фурье, а для материального баланса в талой зоне – уравнение на базе градиента влажности в качестве движущей силы с учетом термоградиентного коэффициента ( $\delta$ ):

$$\frac{dW}{dT} = \frac{d}{dx} \left( a \frac{dW}{dx} + a\delta \frac{dT}{dx} \right),$$

в зоне фазовых переходов – с учетом только термоградиентного коэффициента:

$$\frac{dW}{dT} = \frac{d}{dx} \left( a\delta \frac{dT}{dx} \right).$$

Особенностью подхода автора является обобщение уравнений материального и теплового баланса применительно к случаю возникновения полей деформаций и напряжений.

Используя термодинамический подход и характер зависимости обобщенных термодинамических функций от деформационно-напряженного состояния, автор приводит систему уравнений совместного решения деформационно-напряженного состояния, тепловой задачи и задачи массопереноса.

### ВЫВОДЫ

Модели, в которых решаются задачи совместного влаго-, соле- и теплопереноса и сопутствующих этому процессу механических напряжений, являются наиболее совершенными с точки зрения физической постановки, наиболее полно описывающими решение этих задач. Однако сложность этих моделей, в первую очередь при определении основных коэффициентов, входящих в уравнения, резко ограничивает применимость их на практике.

В таблице представлена типизация физической постановки задачи математических моделей промерзания и пучения грунтов, которая составлена авторами статьи на основе вышеизложенного анализа.

Задачи **фронтовых моделей** можно условно разделить на три группы. В моделях I группы, используемых в работах В.Г. Меламеда и Г.М. Фельдмана, рассматривается градиент влажности в ка-

честве движущей силы влагопереноса. На фронте промерзания решается задача Стефана, при этом предполагается, что градиент влажности определяется перепадом влажности от исходной общей влажности грунта до значений содержания незамерзшей воды на фронте промерзания. Такое решение не является совершенным и однозначным, так как экспериментально доказано, что криогенная миграция в талой зоне может происходить в безградиентном поле влажности, но при этом в градиентном поле порового давления, которое задается температурой на фазовой границе [Чеве-рев, 2004].

Во II группу можно объединить модели, основанные на подходе Р. Миллера. В этих моделях промерзающий грунт подразделяется на три зоны: талую, переходную (промерзающую) и мерзлую. Широобразование при этом рассматривается на границе переходной и мерзлой зон. Температура фронта промерзания всегда фиксирована и равна температуре замерзания порового раствора, а температура на границе переходной и мерзлой зон переменная и является функцией порового давления, влажности и теплового режима промерзания. Существенным недостатком этого подхода является упрощение, в котором процесс влагопереноса рассмотрен только в области так называемого промерзающего слоя, находящегося между фронтом промерзания и первым ледяным шлиром, а далее, за ледяным шлиром, процесс массопереноса игнорируется. В то же время в работе [Ершов, 1999] показано наличие потоков незамерзшей воды и за шлиром, т. е. вполне можно допустить существование промежуточного слоя с ледяными шлирами.

При этом величина порового давления в промерзающей зоне определяется из уравнения (4), а на контакте промерзающей зоны с растущим шлиром давление на лед (в уравнении (4)) приравнивается к внешней нагрузке. В качестве существенного преимущества данного подхода следует указать возможность решения ряда инженерных задач, учитывающих влияние внешней нагрузки [Горелик, 2010].

В моделях III группы, например в моделях Чеверева–Булдовича и Чеверева–Сафронова, переходная зона фактически соответствует зоне предела усадки грунта, а процесс промерзания рассматривается прежде всего в зоне интенсивного льдовыделения в диапазоне температур от  $T_{bf}$  до  $T_{bf} - 0.6$  (где  $T_{bf}$  – температура начала замерзания, °С). В этих моделях в качестве уравнения зависимости порового давления в грунте от температуры используется уравнение Эдлфсена–Андерсена, которое является, по сути, модифицированным уравнением Клапейрона–Клаузиуса, где принимается, что образующийся при замерзании лед не оказывает давления на воду. Такое утверждение справедливо лишь в том случае, если

Типизация физической постановки задачи в математических моделях промерзания и пучения грунтов

Группа	Особенности модели	Авторы
<i>Фронтные модели</i>		
I	Решение задачи Стефана на фронте промерзания с учетом конвективного влагопереноса. Поток воды задается градиентом влажности перед фронтом промерзания. Влажность на фронте промерзания принимается равной влажности нижнего предела пластичности	[Меламед, 1969; Фельдман, 1988]
II	Движущая сила криогенной миграции – градиент порового равновесного давления, определяемого из обобщенного уравнения Клапейрона–Клаузиуса. Модели с тремя зонами в промерзающем грунте: талой, переходной, мерзлой. Два граничных условия с подвижной зоной: на разделе талой и переходной; на разделе переходной и мерзлой	[Miller, 1978]
II	Решение задачи массопереноса в мерзлую зону за счет градиента температур в ней. Введение понятия потенциала сегрегации	[Konrad, Morgenstern, 1980]
II	Льдовыделение на границе талой и мерзлой зон в виде сплошного штира, уравнение Стефана на границе заменено уравнением роста штира. Рассматривается промерзание только на границах промежуточного слоя. Сформулирован критерий сегрегации из условия равенства порового давления внешней нагрузке	[Gilpin, 1980]
II	Вслед за Джилпином сформулирован критерий сегрегации из условия равенства порового давления внешней нагрузке. Разработан алгоритм расчета слоистых текстур с учетом внешней нагрузки, но с учетом свойств реальных грунтов	[O'Neill, Miller, 1985]
III	Рассмотрение талой, переходной (промерзающей) и мерзлой зон. Задание потока воды в мерзлую зону через градиент порового давления воды в мерзлой зоне на базе уравнений Эдлефсена–Андерсена (в потенциальной форме). Аналитическое решение задачи	[Ершов, 1999]
II	Дальнейшее развитие подхода Миллера и Джилпина в промерзающей зоне рассмотрено как у Джилпина, но поровый лед связан с телом растущей линзы	[Горелик, Колунин, 2002]
III	Развитие модели Чеверева–Булдовича. Предложено численное решение задачи с автоматическим изменением градиента давления в талой зоне в зависимости от состояния промерзания, градиентов талой и мерзлой зон и граничных условий. Решается уравнение Фурье в талой и мерзлой зонах	[Чеверев, Сафронов, 2012]
<i>Бесфронтные модели</i>		
I	Уравнения материального баланса решаются через общую влажность и льдистость. Учет фазовых переходов за счет незамерзшей воды в уравнениях Фурье	[Лавров, 2000]
I	Введение времени релаксации кристаллизации и плавления льда. При льдообразовании в мерзлом состоянии	[Даниэлян, Яницкий, 1983]
II	Модифицированное уравнение Фурье для теплового баланса и уравнения материального баланса на базе пористости	[Michalowski, Zhu, 2006]
I	Двумерное решение задачи только для мерзлого состояния грунта. Преобразование уравнения скорости потока воды из градиента влажности в градиент температур	[Li et al., 2013]
I	Решение задачи совместного тепло-, гидро- и солепереноса с учетом перекрестных эффектов гидропереноса, термоградиентного эффекта, эффекта адсорбции соли диффузионным слоем и захвата солей при кристаллизации	[Попов, 2006]
III	Термореологическая модель. Нахождение скорости потока воды с учетом изменения градиента порового давления. Поровое давление находится из уравнения напряженно-деформированного состояния грунта. Решение задачи Стефана находится с учетом изменяющегося порового давления	[Гречищев, 1983]
III	Решение задачи с учетом деформационно-напряженного состояния грунта при замерзании. Движущая сила миграции – градиент равновесного порового давления, определяемого напряженно-деформированным состоянием	[Разбегин, 1983]

на зону промерзания, а именно, на поровое давление в ней, не оказывает влияния фактор внешней нагрузки или гидравлический напор иного генезиса. Учет этого фактора реализован в работе [Чеверев, 2004, с. 16]. Одним из преимуществ данного подхода является возможность учета гидрогеологических условий, внешней нагрузки, при которых необходимо моделировать процесс деформации пучения промерзающего грунта при наличии дополнительного напора со стороны его талой зоны.

Характерным преимуществом существующих на сегодня **бесфронтных моделей** является возможность дву- и трехмерного моделирования процессов промерзания с неравномерным распределением как источника тепла, так и воды в пространстве и во времени. В последнее время появилась тенденция по расширению области применения моделей этого типа за счет учета влияния механической нагрузки, например, в работах [Ming et al., 2016; Li et al., 2018].

Бесфронтные модели можно условно разделить на три группы. К I группе относятся модели, построенные на базе уравнений А.В. Лыкова. Принцип влагопереноса в этих моделях основан на градиенте влажности. Недостатком такого подхода является требование к наличию градиента влажности в талой зоне. Это часто сопряжено с трудностью моделирования промерзания плотных грунтов с влажностью на пределе усадки. Особенно это характерно для пылеватых песков и супесей. Важно также требование учета релаксационного характера реологической деформации и, соответственно, изменения плотности грунта, даже если зона имеет внутренние источники влажности и градиент влажности хорошо определим. Кроме того, возникают трудности с использованием градиента влажности для мерзлых грунтов из-за немонотонной (с экстремумом) зависимости коэффициента диффузии незамерзшей воды от температуры. Есть также сложность физической верификации модели из-за учета полей льдистости при решении уравнений материального баланса. Ситуация еще более усложняется при солепереносе в грунтах вследствие известных перекрестных эффектов взаимно пересекающихся тепловых и материальных потоков. Следует подчеркнуть, что данный метод требует сложных методов контроля динамики полей влажности и льдистости в мерзлых и талых грунтах.

Ко II группе следует отнести модели, в которых уравнения материального и теплового баланса решаются путем введения пористости в качестве переменной. Дополнительным преимуществом этого подхода является возможность решения механической задачи. Основным недостатком подхода можно назвать сложность получения соответствующих коэффициентов в уравнениях для практического применения этих моделей, поскольку, кроме непосредственно льда и воды в мерзлых грунтах, существенное влияние на пористость оказывает также воздух. Несмотря на наличие работ, в которых осуществлялась попытка теоретического учета этого влияния, требуется существенная доработка практических методов определения соответствующих поправок на такое влияние.

К III группе следует отнести модели, в которых, кроме теплового и материального баланса, решаются задачи, связанные с деформационно-напряженным состоянием грунтов. Этот подход является, на наш взгляд, наиболее правильным и решает ряд проблем для задач I группы. Однако он усугубляет и без того сложную физическую верификацию модели и определение основных параметров, указанных в уравнениях напряженно-деформационного состояния, фазового равновесия, теплового и материального баланса. Это сильно

сужает область реальной применимости в настоящее время этих моделей для практики.

*Работа выполнена при финансовой поддержке ООО "НИИ Транснефть" (договор № 4220 П/20-511/2015 от 19.11.2015).*

## Литература

- Бровка Б.Г.** Тепло- и массоперенос в природных дисперсных системах при промерзании. Минск, Наука и техника, 1991, 126 с.
- Гетц И.Г., Мейрманов А.М.** Обобщенное решение задачи Стефана с кинетическим переохлаждением // Сиб. журн. индустр. матем., 2000, т. 3, № 1, с. 66–86.
- Горелик Я.Б.** Физика и моделирование криогенных процессов в литосфере / Я.Б. Горелик, В.С. Колунин. Новосибирск, Изд-во СО РАН, фил. "Гео", 2002, 317 с.
- Горелик Я.Б.** Методы расчета деформаций инженерных конструкций, вызванных пучением пород промерзающего слоя // Криосфера Земли, 2010, т. XIV, № 1, с. 50–62.
- Гречишев С.Е.** Об основах терморегуляции криогенных пород // Проблемы геокриологии. М., Наука, 1983, с. 90–100.
- Даниэлян Ю.С., Яницкий П.А.** Особенности неравновесного перераспределения влаги при промерзании и оттаивании дисперсных грунтов // Инж.-физ. журн., 1983, т. 44, № 1, с. 91–98.
- Кудрявцев В.А., Ершов Э.Д., Чеверев В.Г.** Влагоперенос в мерзлых грунтах // Вестн. МГУ. Сер. Геология, 1973, № 5, с. 26–34.
- Лавров С.А.** Процессы тепловлагопереноса в почвенно-грунтовой толще и снежном покрове: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук. СПб., 2000, 40 с.
- Лыков А.В.** Теория тепло- и массопереноса / А.В. Лыков, Ю.А. Михайлов. М.; Л., Госэнергоиздат, 1963, 536 с.
- Меламед В.Г.** Решение задачи о промерзании тонкодисперсных грунтов с учетом миграции влаги к фронту промерзания // Мерзлотные исследования. М., Изд-во Моск. ун-та, 1969, вып. 9, с. 90–100.
- Павлов А.Р., Пермяков П.П.** Математическая модель и алгоритмы расчета на ЭВМ тепло- и массопереноса при промерзании грунта // Инж.-физ. журн., 1983, т. 44, № 2, с. 311–316.
- Пермяков П.П.** Тепло- и солеперенос в мерзлых ненасыщенных грунтах / П.П. Пермяков, П.Г. Романов. Якутск, Изд-во СО РАН, Якут. фил., 2000, 128 с.
- Попов В.И.** Математическое моделирование тепломассопереноса в горных породах с использованием диаграммы фазового равновесия: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. Якутск, 2006, 120 с.
- Общее мерзлотоведение** / Под ред. В.А. Кудрявцева. М., Изд-во Моск. ун-та, 1978, 464 с.
- Основы геокриологии.** Ч. 5. Инженерная геокриология / Под ред. Э.Д. Ершова. М., Изд-во Моск. ун-та, 1999, 526 с.
- Разбегин В.Н.** Термодинамические аспекты механики мерзлых грунтов. М., Наука, 1983, 104 с.
- Тихонов А.Н.** Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. М., Наука, 1999, 196 с.
- Фельдман Г.М.** Передвижение влаги в талых и промерзающих грунтах. Новосибирск, Наука, 1988, 256 с.
- Чеверев В.Г.** Физико-химическая теория формирования массообменных и тепловых свойств криогенных грунтов: Автореф. дис. ... д-ра геол.-мин. наук. М., 1999, 41 с.

- Чеврев В.Г.** Классификация форм связи воды в мерзлых тонкодисперсных грунтах // Криосфера Земли, 2003а, т. VII, № 3, с. 31–40.
- Чеврев В.Г.** Свойства связанной воды в криогенных грунтах (аналитический обзор) // Криосфера Земли, 2003б, т. VII, № 2, с. 30–41.
- Чеврев В.Г.** Природа криогенных свойств грунтов. М., Науч. мир, 2004, 234 с.
- Чеврев В.Г., Брушков А.В., Половков С.А., Покровская Е.А., Сафронов Е.В.** Анализ представлений о механизме криогенной миграции воды в промерзающих грунтах // Криосфера Земли, 2021, т. XXV, № 5, с. 3–12.
- Чеврев В.Г., Бурнаев Р.С., Гагарин В.Е., Сафронов Е.В.** Влияние внешней нагрузки на степень морозной пучинистости глинистых грунтов // Криосфера Земли, 2013, т. XVII, № 4, с. 57–62.
- Чеврев В.Г., Сафронов Е.В.** Математическое моделирование промерзания грунтов с визуализацией формирующейся криогенной текстуры // Десятая Междунар. конф. по мерзлотоведению (TICOP): Ресурсы и риски регионов с вечной мерзлотой в меняющемся мире. Салехард, Сев. издво; Тюмень, Печатник, 2012, т. 3, с. 561–564.
- Abdalla B., Fan C., Mckinnon C. et al.** Extended porosity rate function for frost heave // 33rd Intern. Conf. on Ocean, Offshore and Arctic Engineering. Vol. 10: Polar and Arctic Science and Technology (San Francisco, California, USA, June 8–13, 2014). New York, Publ. ASME, 2014, V010T07A046.
- Akagawa S., Satoh M., Kanie S. et al.** Effect of tensile strength on ice lens initiation temperature // 13th Intern. Conf. on Cold Regions Engineering (Orono, Maine, U.S., July 23–26, 2006). Reston, VA, U.S., Publ. ASCE, 2006, p. 1–12.
- Bronfenbrener L., Bronfenbrener R.** Modeling frost heave in freezing soils // Cold Reg. Sci. and Technol., 2010, vol. 61, p. 43–64.
- Edlefsen N.E., Anderson A.B.C.** Thermodynamics of Soil Moisture. Hilgardia, 1943, p. 31–298.
- Gilpin R.** A model for the prediction of ice lensing and frost heave in soils // Water Resources Res., 1980, vol. 16, No. 5, p. 918–930.
- Konrad J.M., Morgenstern N.R.** Mechanistic theory of ice lens formation in fine-grained soils // Can. Geotech. J., 1980, vol. 17, p. 473–486.
- Li S., Zhang M., Pei W. et al.** Experimental and numerical simulations on heat-water-mechanics interaction mechanism in a freezing soil // Appl. Thermal Eng., 2018, vol. 132, p. 209–220.
- Li Z., Liu S., Feng Y. et al.** Numerical study on the effect of frost heave prevention with different canal lining structures in seasonally frozen ground regions // Cold Reg. Sci. and Technol., 2013, vol. 85, p. 242–249.
- Loranger B.** Laboratory investigation of frost susceptibility of crushed rock aggregates and field assessment of frost heave and frost depth: Thesis for the Degree of Ph.D. Norway, Trondheim, 2020, 189 p.
- Ma W., Zhang L., Yang C.-S.** Discussion of the applicability of the generalized Clausius–Clapeyron equation and the frozen fringe process // Earth-Sci. Revs., 2015, vol. 142, p. 47–59.
- Michalowski R.L., Zhu M.** Modelling of freezing in frost-susceptible soils // Computer Assisted Mechanics and Eng. Sci., 2006, vol. 13, p. 613–625.
- Miller R.D.** Frost heaving in non-colloidal soils // 3rd Intern. Conf. on Permafrost (Edmonton, Alberta, Canada, July 10–13, 1978): Proc. Ottawa, Nat. Res. Council of Canada, 1978, vol. 1, p. 708–713.
- Ming F., Zhang Y., Dongging Li.** Experimental and theoretical investigations into the formation of ice lenses in deformable porous media // Geosciences J., 2016, vol. 20, p. 667–679.
- O’Neill K., Miller R.** Exploration of a rigid ice model of frost heave // Water Resources Res., 1985, vol. 21, No. 3, p. 281–296.

## References

- Brovka G.P. Teplo- i massoperenos v prirodnykh dispersnykh sistemah pri promerzanii [Heat and mass transfer in natural dispersed systems during freezing]. Minsk, Nauka i Tekhnika, 1991, 126 p. (in Russian).
- Getz I.G., Meirmanov A.M. Generalized solution of the Stefan problem with kinetic supercooling. Sib. zhurn. industrir. matem. [Journal of Applied and Industrial Mathematics], 2000, vol. 3, No. 1, p. 66–86 (in Russian).
- Gorelik J.B., Kolunin V.S. Fizika i modelirovanie kriogennykh processov v litosfere [Physics and modeling of cryogenic processes in the lithosphere]. Novosibirsk, Publishing House of SB RAS, Geo Branch, 2002, 317 p. (in Russian).
- Gorelik J.B. On the calculation methods of the engineering construction displacements caused by freezing layer frost heave process. Kriosfera Zemli [Earth’s Cryosphere], 2010, vol. XIV, No. 1, p. 50–62 (in Russian).
- Grechishchev S.E. On the basics of thermorheology of cryogenic rocks. In: Problemu geokriologii [Problems of Geocryology]. Moscow, Nauka, 1983, p. 90–100 (in Russian).
- Danielyan Yu.S., Yanitsky P.A. Features of nonequilibrium redistribution of moisture during freezing and thawing of dispersed soils. Inzhenerno-fizicheskij zhurnal [Journal of Engineering Physics and Thermophysics], 1983, vol. 44, No. 1, p. 91–98 (in Russian).
- Kudryavtsev V.A., Ershov E.D., Cheverev V.G. Moisture transfer in frozen soils. Vestnik MSU. Ser. Geologiya [Bulletin of Moscow State University, Geology series], 1973, No. 5, p. 26–34 (in Russian).
- Lavrov S.A. Processes of heat and moisture transfer in the soil and snow cover. Thesis abstract for degree Doctor of Technical Sciences. St. Petersburg, 2000, 40 p. (in Russian).
- Lykov A.B., Mikhailov Yu.A. Teoriya teplo- i massoperenosa [Theory of Heat and Mass Transfer]. Moscow; Leningrad, Gosenergoizdat, 1963, 536 p. (in Russian).
- Melamed V.G. Solution of the problem of freezing of fine-grained soils taking into account the migration of water to the freezing front. In: Permafrost studies. Moscow, Moscow State University Publ., 1969, iss. 9, p. 90–100 (in Russian).
- Pavlov A.R., Permyakov P.P. Mathematical model and algorithms for calculating heat and mass transfer on a computer during soil freezing. Inzhenerno-fizicheskij zhurnal [Journal of Engineering Physics and Thermophysics], 1983, vol. 44, No. 2, p. 311–316 (in Russian).
- Permyakov P.P., Romanov P.G. Teplo- i soleperenos v merzlykh nenasyshchennykh gruntah [Heat and salt transfer in frozen unsaturated soils], Yakutsk, Publishing house of YAF SO RAN, 2000, 128 p. (in Russian).
- Popov V.I. Mathematical modeling of heat and mass transfer in rocks using a phase equilibrium diagram. Thesis abstract for degree of candidate of Technical Sciences. Yakutsk, 2006, 120 p. (in Russian).
- Obshtchee merzlotovedenie [General Geocryology]. V.A. Kudryavtsev (Ed.). Moscow, MGU, 1978, 464 p. (in Russian).
- Osnovy geokriologii. Ch. 5. Inzhenernaya geokriologiya [Fundamentals of Geocryology. Part 5. Engineering Geocryology]. E.D. Yershov (Ed.). Moscow, Moscow State University Publ., 1999, 526 p. (in Russian).



- Razbegin V.N. Termodinamicheskie aspekty mekhaniki merzlykh gruntov [Thermodynamic aspects of mechanics of frozen soils]. Moscow, Nauka, 1983, 104 p. (in Russian).
- Tikhonov A.N., Samarsky A.A. Uravneniya matematicheskoy fiziki [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1999, 196 p. (in Russian).
- Feldman G.M. Peredvizhenie vlagi v talyh i promerzayushchih gruntah [The Movement of Water in Thawed and Freezing Soils]. Novosibirsk, Nauka, 1988, 256 p. (in Russian).
- Cheverev V.G. Physico-chemical theory of the formation of mass-exchange and thermal properties of cryogenic soils. Thesis abstract for degree Doctor of Geol.-Min. Sciences. Moscow, 1999, 41 p. (in Russian).
- Cheverev V.G. Classification of water bond forms in the frozen fine-grained soils. Kriosfera Zemli [Earth's Cryosphere], 2003a, vol. VII, No. 3, p. 31–40 (in Russian).
- Cheverev V.G. Properties of bound water in cryogenic grounds (analytic review). Kriosfera Zemli [Earth's Cryosphere], 2003b, vol. VII, No. 2, p. 30–41 (in Russian).
- Cheverev V.G. Priroda kriogennykh svoystv gruntov [Nature of Cryogenic Properties of Soils]. Moscow, Nauchnyj mir, 2004, 234 p. (in Russian).
- Cheverev V.G., Brushkov A.V., Polovkov S.A., Pokrovskaya E.A., Safronov E.V. Analysis of concepts on the mechanism of cryogenic water migration in freezing soils. Earth's Cryosphere, 2021, vol. XXV, No. 5, p. 3–12.
- Cheverev V.G., Burnaev R.S., Gagarin V.E., Safronov E.V. Influence of the external pressure on the degree of frosty heaving of clay soils. Kriosfera Zemli [Earth's Cryosphere], 2013, vol. XVII, No. 4, p. 57–62 (in Russian).
- Cheverev V.G., Safronov E.V. Mathematical modeling of soil freezing with visualization of the forming cryogenic structure. In: The Tenth International Conference on Permafrost (TICOP): Resources and risks of permafrost regions in a changing world. Salekhard, Severnoe Izd.; Tyumen, Pechatnik, 2012, vol. 3, p. 561–564 (in Russian).
- Abdalla B., Fan C., Mckinnon C. et al. Extended porosity rate function for frost heave. In: 33rd International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering. Vol. 10: Polar and Arctic Science and Technology (San Francisco, California, USA, June 8–13, 2014). New York, Publ. ASME, 2014, V010T07A046. – <https://doi.org/10.1115/OMAE2014-24221>
- Akagawa S., Satoh M., Kanie S. et al. Effect of tensile strength on ice lens initiation temperature. In: 13th International Conference on Cold Regions Engineering (Orono, Maine, United States, July 23–26, 2006). Reston, VA, United States, 2006, Publ. ASCE, p. 1–12. – [https://doi.org/10.1061/40836\(210\)43](https://doi.org/10.1061/40836(210)43)
- Bronfenbrener L., Bronfenbrener R. Modeling frost heave in freezing soils. Cold Reg. Sci. and Technol., 2010, vol. 61, p. 43–64.
- Edlefsen N.E., Anderson A.B.C. Thermodynamics of soil moisture. Hilgardia, 1943, p. 31–298.
- Gilpin R. A model for the prediction of ice lensing and frost heave in soils. Water Resources Res., 1980, vol. 16, No. 5, p. 918–930.
- Konrad J.M., Morgenstern N.R. Mechanistic theory of ice lens formation in fine-grained soils. Can. Geotech. J., 1980, vol. 17, p. 473–486.
- Li S., Zhang M., Pei W. et al. Experimental and numerical simulations on heat-water-mechanics interaction mechanism in a freezing soil. Appl. Thermal Engineering, 2018, vol. 132, p. 209–220.
- Li Z., Liu S., Feng Y. et al. Numerical study on the effect of frost heave prevention with different canal lining structures in seasonally frozen ground regions. Cold Reg. Sci. and Technol., 2013, vol. 85, p. 242–249.
- Loranger B. Laboratory investigation of frost susceptibility of crushed rock aggregates and field assessment of frost heave and frost depth: Thesis for the Degree of Ph. D. Norway, Trondheim, 2020, 189 p.
- Ma W., Zhang L., Yang C.-S. Discussion of the applicability of the generalized Clausius–Clapeyron equation and the frozen fringe process. Earth-Science Revs., 2015, vol. 142, p. 47–59.
- Michalowski R.L., Zhu M. Modelling of freezing in frost-susceptible soils. Computer Assisted Mechanics and Eng. Sci., 2006, vol. 13, p. 613–625.
- Miller R.D. Frost heaving in non-colloidal soils. In: 3rd International Conference on Permafrost (Edmonton, Alberta, Canada, July 10–13, 1978): Proc. Ottawa, National Research Council of Canada, 1978, vol. 1, p. 708–713.
- Ming F., Zhang Y., Dongging Li. Experimental and theoretical investigations into the formation of ice lenses in deformable porous media. Geosciences J., 2016, vol. 20, p. 667–679.
- O'Neill K., Miller R. Exploration of a rigid ice model of frost heave. Water Resources Res., 1985, vol. 21, No. 3, p. 281–296, DOI: 10.1029/WR021i003p00281.

*Поступила в редакцию 3 июля 2021 г.,  
после доработки – 17 января 2022 г.,  
принята к публикации 19 апреля 2022 г.*