

ПРОБЛЕМЫ КРИОЛОГИИ ЗЕМЛИ

УДК 551.345.2

ОБОБЩЕНИЕ АВТОМОДЕЛЬНЫХ И КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ
РЕШЕНИЙ ПО МОДЕЛИРОВАНИЮ СЕЗОННОГО ПРОМЕРЗАНИЯ—
ПРОТАИВАНИЯ ПОРОД НА ОСНОВЕ МЕТОДА ВОЗМУЩЕНИЙ

И. А. Комаров

Московский государственный университет, геологический ф-т, 119899, Москва, Воробьевы Горы, Россия

Приводятся результаты моделирования процесса промерзания-оттаивания методом возмущений. Дано количественное сравнение с известными в геокриологии соотношениями Стефана, Лейбензона, Павлова, Балобаева, Кудрявцева, Фельдмана, Лукьянова-Головко.

Геокриология, прогноз, промерзание, оттаивание, метод возмущений

GENERALIZATION OF AUTOMODEL AND QUASI-STATIONARY SOLUTIONS
ON MODELLING OF FREEZING-MELTING PROCESS BY PERTURBATION METHODS

I. A. Komarov

Moscow State University, Department Geology, 119899, Moscow, Vorobjovy Gory, Russia

Results of modelling of freezing-thawing process by perturbation methods are reported. Quantitative comparizon with relations of Stefan, Laybenzon, Pavlov, Balobaev, Kudryvtsev, Feldman, Lukanov-Golovko, which are known in geocryology, are given.

Geocryology, prediction, frezing, pertrurbation methods

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, аналитические решения, в частности, автомодельные и квазистационарные, до сих пор широко применяются в геокриологии, являясь основой для прогнозных схем расчета, в том числе в нормативной литературе, и давая вполне удовлетворительное качественное и количественное сопоставление с данными натуральных наблюдений. Сравнение точности различных формул для вычисления скорости промерзания—оттаивания, полученных на основе квазистационарного приближения, проведено [Вотякова, 1972], а затем более полно [Гречищев и др., 1980]. В последней работе основное внимание уделено вопросу об оптимальной точности расчетов, при учете различного числа влияющих на интенсивность процесса промерзания факторов. Однако все проанализированные соотношения Стефана, Бергрена, Хакимова, Докучаева, Павлова и Балобаева были получены авторами единым методом при предположении о линей-

ности профиля температур в промерзающей (оттаивающей) зоне и поэтому учет нестационарности реальных температурных полей (рис. 1) может привести к определенным коррективам результата. С другой стороны, автомодельные решения широко используются как тестовые при численной реализации задач промерзания—оттаивания на ЭВМ. Поэтому оценки величин погрешностей, возникающих между точным (нестационарным) решением и его приближенным решением, полученным на основе квазистационарности, а также нахождение пределов применимости последних является достаточно актуальной задачей, которую мы решаем, используя метод малого параметра [Коздоба, 1975]. Применение метода возмущений позволяет провести на единой основе обобщение результатов, полученных также и другими методами, например балансовым методом Кудрявцева, и предложить ряд новых результатов, получение которых с

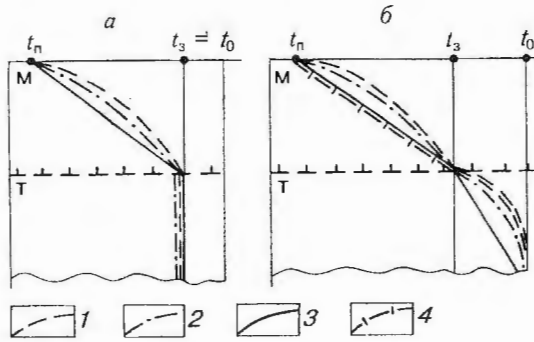


Рис. 1. Характер распределения температур в мерзлой и талой зонах массива.

При отсутствии теплообмена с подстилающими породами (а) и при его наличии (б): 1 — автомодельное решение по формуле (3) для случая а, и классическое решение (формула Неймана) для случая б; 2 — решение методом малого параметра (6) и (7) для а, по (10) для б; 3 — квазистационарное приближение (формула Стефана) для а, формула Крылова для б; 4 — решение методом Лейбензона (11) для б; t_n, t_0, t_3 — соответственно, температура на поверхности пород, на подошве слоя нулевых годовых амплитуд, на границе раздела зон (температура начала замерзания).

помощью других методов проблематично. Рассмотрим наиболее простой случай.

а. Промерзание массива пород, начальная температура которого постоянна и равна температуре фазового перехода t_3 . Этот случай описывается автомодельной задачей Стефана (задача Ламэ-Клайперона). Температура на поверхности полубесконечного массива пород в начальный момент мгновенно становится постоянной и равной t_n . При этом появляется подвижная граница раздела фаз $\xi(\tau)$. Решение задачи известно [Основы ..., 1959] и имеет вид:

$$t_m(x, \tau) = t_n + (t_3 - t_n) \operatorname{erf} (x/2 \sqrt{a_m \tau}) / d/\operatorname{erf} (\beta/2 \sqrt{a_m}), \quad \xi = \beta \sqrt{\tau}. \quad (1)$$

Здесь β определяется из уравнения: $z \exp(z^2) \operatorname{erf}(z) = C_m(t_n - t_3)/Q_\phi \sqrt{\pi}$, а $z = \beta/2 \sqrt{a_m}$; $C_m = \lambda_m/a_m$; где $\operatorname{erf}(\cdot)$ — интеграл ошибок; λ_m, a_m, C_m — теплопроводность, температуропроводность и теплоемкость мерзлых пород соответственно; Q_ϕ — теплота фазовых переходов; x, τ — координата и время соответственно.

Уравнение (1) решается на ЭВМ с помощью численных методов, а приближенное решение получается путем разложения функций $\operatorname{erf}(z)$ и $\exp(-z^2)$ в ряды для малых z . Поскольку вышеуказанные ряды являются быстросходящимися, то при $z \ll 1$, можно ограничиться первыми членами разложения ряда. Подставляя эти значения в (1), получим:

$$2z = \delta = [2C_m(t_n - t_3)/Q_\phi]^{1/2}, \quad \text{при } z \ll 1, \quad (2)$$

а, подставляя (2) в (1), получим известную формулу Стефана. Однако это же соотношение можно получить из решения исходной системы для случая линейной аппроксимации профиля температур (см. рис. 1), т. е. используя квазистационарное приближение, применимость которого связано с выполнением условия $z \ll 1$ в (2). Физически это обусловлено требованием, чтобы теплота, которая идет на перестройку поля в мерзлой зоне $C_m \Delta t$, была много меньше, чем та, которая идет на фазовые переходы, т. е. $C_m \Delta t \ll Q_\phi$. В пределах, когда $C_m \Delta t \rightarrow 0$, все подводимое тепло идет на фазовые переходы, а профиль температур будет линейным. Иными словами, применимость квазистационарного приближения обусловлена требованием, при котором изменение массы кристаллизующейся воды за время установления поля температур в зоне было ничтожно мало. Как следует из (2), формула Стефана при прочих равных условиях будет лучше работать для случаев: оттаивания сильнольдистых массивов; промерзания низин, торфяников с большим влагосодержанием и хуже, для водораздельных элементов рельефа, сложенных хорошо дренируемыми породами и т. д. Вышеприведенные соображения о правомочности использования квазистационарного приближения, для нахождения величины ξ являются качественными, поскольку не указывают границ применимости. Для такой оценки воспользуемся методом малого параметра. Малый параметр может вытекать из постановки задачи или вводиться искусственно. Для обсуждаемого случая величина малого параметра имеет совершенно ясный физический смысл, указанный выше в соотношении (2). При введении новых переменных: $T = (t_3 - t)/(t_3 - t_n)$, $\varepsilon = C_m(t_3 - t_n)/Q_\phi$ и $\mu = \varepsilon t a_m$ исходная краевая задача приобретает вид:

$$\varepsilon \frac{\partial T}{\partial \mu} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad \mu > 0 \times \in (0, \xi(\mu)); \quad -\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=\xi(\mu)} = \frac{d\xi}{d\mu};$$

$$T(\infty, \mu) = T(x, 0) = 0; \quad T(0, \mu) = 1;$$

$$T_m(\xi(\mu), \mu) = 0.$$

По методу возмущений решение поставленной задачи отыскивается в виде рядов по изменяющимся степеням малого параметра:

$$T = \sum \varepsilon^n T_n = T_0 + \varepsilon T_1 + \varepsilon^2 T_2;$$

$$\mu = \sum \varepsilon^n \mu_n = \mu_0 + \varepsilon \mu_1 + \varepsilon^2 \mu_2 \dots \quad (3)$$

Ряды (3) подставляем в преобразованную систему уравнений, почленно дифференцируем и затем приравняем члены при одинаковых степенях. Вид решения, с точностью до 3-го члена ряда, имеет вид:

$$T = 1 - \frac{x}{\xi} \left[1 - \frac{\varepsilon}{6} \left(\frac{x^2}{\xi^2} - 1 \right) + \frac{\varepsilon^2}{4} \left(\frac{x^4}{10\xi^4} + \frac{x^2}{9\xi^4} - \dots \right) \right], \quad (4)$$

$$\mu = \frac{\xi^2}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon}{6} - \frac{2\varepsilon^2}{45} + \dots \right). \quad (5)$$

Анализ рядов (4, 5) показывает, что выражение для первого члена разложения ($n = 0$ — „нулевое“ приближение) в исходных переменных соответствует линейному (стационарному) профилю температур в мерзлой зоне (см. рис. 1) и величине мощности этой зоны ξ , рассчитанной по формуле Стефана. Второе ($n = 1$) и третье ($n = 2$) слагаемые рядов являются „нестационарными“ добавками к невозмущенному (стационарному) решению. Результаты сравнения значений ξ , рассчитанные по формуле Стефана с помощью ряда (5) и автомодельной задачи (1), которая принимается за „точное“ решение, представлены на рис. 2. Из него видно, что при малых $\varepsilon < 0,15$ использование квазистационарного приближения правомерно с погрешностью менее 10 %, а следовательно, оценка глубины сезонного промерзания (оттаивания) по формуле Стефана не приводит к существенным погрешностям. Однако, когда соотношение теплоаккумуляционной способности массива пород и динамики его влажностного поля таково, что $\varepsilon > 0,15$, то для нахождения температурных полей и величины ξ целесообразно использование автомодельного решения или решения (4, 5). Причем для широчайшего спектра природных условий, когда $\varepsilon < 2,0$, три слагаемые ряда (7) обеспечивают удовлетворительную точность оценки ξ .

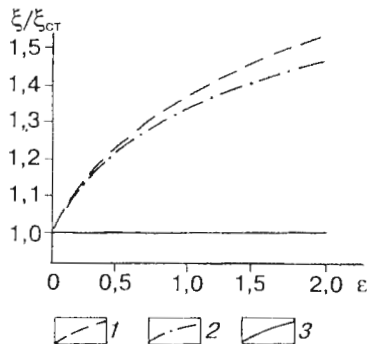


Рис. 2. Сравнение расчетных значений мощности зоны промерзания нормированной по соответствующей величине $\xi_{ст}$, оцененной по формуле Стефана, в зависимости от величины малого параметра ε .

1 — автомодельное решение (3), принимаемое за точное; 2 — приближенное решение методом малого параметра, с точностью до 3-го члена асимптотического ряда (7); 3 — квазистационарное решение (формула Стефана).

б. Учет теплообмена с подстилающими породами. Этот случай описывается классической автомодельной задачей Стефана [Основы ..., 1974]. Исходя из соображений о целесообразности компактного изложения материала запишем сразу обобщенное соотношение для нахождения β из задачи промерзания, при наличии снежного покрова на поверхности мощностью $l_{сн}$, который меняется во времени по параболическому закону $l_{сн}(t) = \gamma \sqrt{t}$. Для полубесконечного массива при постоянной температуре поверхности, задача сводится к автомодельной и известно ее точное решение [Фельдман, 1977]. Вид трансцендентного уравнения с учетом соотношений $\beta(a_M)^{1/2} = 2z = \delta$ будет:

$$z = \frac{\delta}{2} = \frac{C_M(t_3 - t_n) \exp(-z^2)}{\sqrt{\pi} Q_\Phi \operatorname{erf}(z) + (\lambda_M / \lambda_{сн}) (a_{сн} / a_M)^{1/2} \operatorname{erf}(\gamma / 2\sqrt{a_{сн}})} - \frac{C_{сн}(t_0 - t_3) \exp(-z^2 a_M / a_T)}{Q_\Phi (a_M / a_T)^{1/2} \operatorname{erfc}(z (a_M / a_T)^{1/2})}, \quad (6)$$

где индексы „т“ и „сн“ относятся соответственно к тальм породам и снежному покрову.

Когда $\gamma = 0$, уравнение (6) дает соотношение для оценки β в классической задаче Стефана, а если и $t_0 = t_3$, то (6) переходит в (1). При решении рассматриваемой задачи методом возмущений, ясное физическое обоснование введенного малого параметра, которое было дано выше, уже неприемлемо. Малый параметр вводится в более искусственным способом [Комаров и др., 1987], но так, чтобы величина безразмерного параметра ε для переменных $\varepsilon_1 = C_M(t_3 - t_n) / Q_\Phi$ и $\varepsilon_2 = C_T(t_0 - t_3) / Q_\Phi$ в реальных условиях имела порядок $\varepsilon < 1$ и могла считаться малым числом. Тогда малый параметр вводится в уравнение (6) при $\gamma = 0$ следующим способом. Обозначая через $f(\delta)$ функцию, которая получится, если заменить $z = \delta/2$ и разделить на правую часть равенства (6), получим: $f(\delta) = \varepsilon^2$, при $\varepsilon \in [0, 1]$. Воспользовавшись тем, что $f(\varepsilon)$ является аналитической функцией параметра ε и может быть разложена в ряд для его малых значений, корень уравнения (6) представляется рядом по степеням параметра возмущения ε :

$$\delta(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \delta_n \varepsilon^n, \text{ где } \delta_n:$$

$$\delta = \frac{1}{n!} \left(\frac{d}{d\varepsilon} \right)^{n-1} \left[\left(\frac{\delta}{f(\delta)} \right)^{1/2} \right]_{\delta=0}. \quad (7)$$

Ограничиваясь первыми 2 коэффициентами ряда (7), имеющими вид: $\delta_1 = \left(\frac{2C_M t_n}{Q_\Phi} \right)^{1/2}$ и

$$\delta_2 = - \frac{C_T t_0}{Q_\Phi} \left(\frac{a_T}{a_M \pi} \right)^{1/2}, \text{ получим выражение для } \xi(\tau):$$

$$\xi = \left(\frac{2\lambda_m |t_n|}{Q_\Phi} \tau \right)^{1/2} - \frac{|t_0|}{Q_\Phi} \left(\frac{\lambda_T C_T}{\pi} \tau \right)^{1/2}. \quad (8)$$

Интересно отметить, что первое слагаемое имеет вид формулы Стефана, подкоренное выражение которого в дальнейшем будем обозначать $\xi_{ст}^2$, а второе слагаемое обозначим S . Для случаев, когда $\varepsilon < 1$, формула (8) дает удовлетворительное сопоставление с данными, полученными из автотельной задачи, и близка по точности к оценке ξ по формуле Лейбензона [Основы ..., 1974]:

$$\xi = (\xi_{ст}^2 + S^2)^{1/2} - S; \quad S = C_T |t_0| (a_T \tau / \pi)^{1/2} / Q_\Phi. \quad (9)$$

Для широкого спектра природных условий сезонного промерзания величина $S < 1$ и поэтому $\xi_{ст}^2 \gg S^2$, тогда уравнение (9) становится идентичным решению, полученному с помощью двух членов ряда (8).

Квазистационарное решение задачи промерзания при условии постоянства величины теплопотока из подстилающих пород ($q_T = const$) было дано Крыловым [Основы ..., 1959]. Решением является уравнение типа (9), где $S = q_T \tau / Q_\Phi$. Войтковский (1954), Балобаев (1966), Павлов (1975) получили подобные решения путем интегрирования условия Стефана при нестационарном потоке снизу, однако в отличие от Лейбензона профиль в нижней (талой) зоне ими не находился из решения подчиненной задачи с привлечением различного рода эмпирической информации. В частности, решение Павлова (1975) представляется в виде уравнения (9):

$$S = \frac{\lambda_T t_0' \tau^{1/2}}{(\pi a_T)^{1/2} (Q_\Phi + 1,2 C_T t_0' \pi^{-1/2})} \text{ и}$$

$$\xi_{ст}^2 = \frac{2\lambda_T \tau}{Q_\Phi + 1,2 C_T t_0' \pi^{-1/2}},$$

где t_0' — усредненное значение температуры, которое используется вместо задаваемого начального распределения в талой зоне $t_T(x, 0)$ и может определяться либо как среднеинтегральная в слое нулевых годовых амплитуд, либо на основании наблюдений на стационарах.

в. Температура на поверхности меняется по периодическому закону, учитывается теплообмен с подстилающими породами. Рассмотрим аналогичную задачу (пункт б) при условии, что на поверхности пород температура изменяется по периодическому закону.

Приближенное решение задачи получено Кудрявцевым [Основы ..., 1975], основная идея подхода которого заключается в том, что вид температурного профиля в слое нулевых годовых

амплитуд H_0 задается заведомо искаженным отношением истинного, но таким образом, чтобы выполнялись условия баланса тепла (теплооборотов) в этом слое за определенный период времени, равный году T . Таким образом, уравнение теплопроводности удовлетворялось в среднем. Для случая, когда теплофизические характеристики в талом и мерзлом состоянии равны, а температурная сдвигка отсутствует, выражение для нахождения величины мощности ξ имеет вид [Основы ..., 1975]:

$$\xi = \frac{2(A_0 - |t_0|) (\lambda T C)^{1/2}}{\pi^{1/2}} + \frac{(2A_{cp} \xi_{2c} C + \xi Q_\Phi) Q_\Phi (\lambda T / \pi C)^{1/2}}{2A_{cp} \xi_{2c} C + Q_\Phi \xi + (2A_{cp} C + Q_\Phi) (\lambda T / \pi C)^{1/2}} / 2A_{cp} C + Q_\Phi, \quad (10)$$

$$\xi_{2c} = \frac{2(A_0 - |t_0|) (T C \lambda / \pi)}{2A_{cp} C + Q_\Phi};$$

$$A_{cp} = \left\{ (A_0 - |t_0|) / \ln \frac{A_0 + Q_\Phi / 2C}{|t_0| + Q_\Phi / 2C} \right\} - \frac{Q_\Phi}{2C},$$

трансцендентного уравнения, которое решается численным методом.

Соотношение между значениями амплитуд A_0, A_{cp}, A_{np} (соответственно, максимальной, средней и приведенной) дано на рис. 3.

В зависимости от соотношения теплооборотов, идущих на фазовые переходы Q_w и на перестройку температурного поля в мерзлой и талой зонах, Q_c принципиально могут реализоваться два предельных случая: первый, когда $Q_w \ll Q_c$ характерный, например, для промерзания неводонасыщенных пород. Тогда $A_{np} \Rightarrow A_{cp}$ и величина ξ , исходя из (10), будет находится по известному соотношению для среды, в которой отсутствуют фазовые переходы:

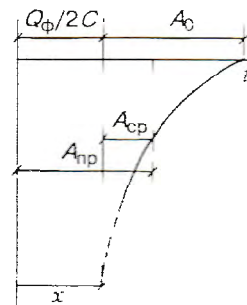


Рис. 3. Профиль затухания амплитуды по глубине слоя нулевых годовых амплитуд (по В. А. Кудрявцеву), здесь A_0, A_{cp}, A_{np} — соответственно амплитуда на поверхности, средняя и приведенная амплитуда.

Q_Φ — тепло, идущее на фазовые переходы, C — теплоемкость.

$\xi = (\lambda T / C\pi)^{1/2} \ln(A_0 / |t_0|)$, где $\xi = H_0$; второй, когда $Q_w \gg Q_c$ (промерзание увлажненных пород, оттаивание сильнольдистых массивов и т. д.). Тогда, как это следует из рис. 3, величина $A_{cp} \Rightarrow Q_\phi / 2C$, а $A_{cp} \Rightarrow 0$. Оценим условия когда это реализуется, введя переменные $\epsilon_1 = 2CA_0 / Q_\phi = \alpha$ и $\epsilon_2 = 2C |t_0| / Q_\phi = \beta$, как это сделано В. Е. Романовским, построившим на их основе номограммы для расчета по формуле Кудрявцева. Но в пунктах а, б показано, что параметры такой структуры полностью аналогичны введенному малому параметру ϵ . Параметры возмущений будут малы (т. е. $\epsilon_1 \ll 1$ и $\epsilon_2 \ll 1$) в случае, когда $Q_\phi \gg 2CA_0$ и $Q_\phi \gg 2C |t_0|$. Преобразуя выражение для средней амплитуды (10) путем деления числителя и знаменателя на $Q_\phi / 2C$, получим, что $A_{cp} \Rightarrow 0$, когда с заданной точностью выполняются соотношения $\ln(\epsilon_1 + 1) \cong \epsilon_1$ и $\ln(\epsilon_2 + 1) \cong \epsilon_2$. Формула Кудрявцева (10) для случая, когда $A_{cp} = 0$ существенно упрощается и после преобразований сводится к рассмотренному уже типу квадратного уравнения (9), где $S = [2(A_0 - |t_0|) (\lambda TC / \pi)^{1/2}] / Q_\phi$, а $\xi_{cr}^2 = 2\lambda(A_0 - |t_0|)T / \pi Q_\phi$. Выражение является аналогом формулы Лейбензона для фиксированного диапазона времени равного T (при знаке „-“ перед S). На рис. 4 приведены результаты расчетов по квадратному уравнению (9) и формуле (10). Сравнение показывает, что в широчайшем диапазоне природных условий, в котором реализуются соотношения $0 \leq \epsilon_1(\beta) \leq 3,0 \leq \epsilon_2(\alpha) \leq 9,0$, ошибка расчета не превышает 20 %, а в спектре часто встречаемых условий она меньше величины 13—15 %. Можно отметить еще один предельный случай, возникающий даже тогда, когда теплообороты, идущие на фазовые переходы, сопоставимы с теплооборотами, идущими на перестройку температурного поля. Он реализуется в том случае, когда величина

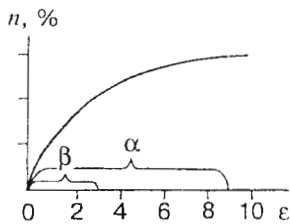


Рис. 4. Зависимость погрешности n , % результатов расчета величины мощности зоны промерзания ξ по формуле Кудрявцева (10) и по уравнению типа (9) в зависимости от величины малого параметра ϵ .

α и β — величины малого параметра по среднегодовой температуре и ее амплитуде соответственно.

амплитуды A_0 становится близка к $|t_0|$, т. е. $A_0 / |t_0| \Rightarrow 1$, и $\alpha \Rightarrow \beta$. Тогда разлагая величину $\ln((\alpha + 1) / (\beta + 1))$ в ряд, при условии, что $(\alpha + 1) / (\beta + 1) \Rightarrow 1$ и ряд быстро сходится, можно ограничиться первым членом разложения в ряд. Тогда логарифмический профиль температуры можно заменить на линейный (см. рис. 3), а величину теплооборотов очень просто оценить по величине площади треугольника. Для практических целей, ошибка расчета по линейному профилю не превышает 20 %, если выполняется условие: $[A_0 + Q_\phi / 2C] / [|t_0| + Q_\phi / 2C] < 1,5$, которое может реализоваться, например, для районов с морским типом сезонного промерзания (по амплитуде) и устойчивым (по среднегодовой температуре) (все по классификации В. А. Кудрявцева).

г. Учет наличия на поверхности снежного покрова (слоя изоляции) с заданным во времени законом снегонакопления. Автомодельная задача рассмотрена в [Фельдман, 1977], где для ее реализации использовалась параболическая аппроксимация закона увеличения мощности снежного покрова во времени, температура на поверхности задавалась постоянной $t_n = \text{const}$. Тогда положение фронта определяется по уравнению (1), где β находится из (6). Рассмотрим решение этой задачи методом малого параметра для случая, когда $\gamma > 0$. Корень уравнения (6) будет представляться рядом по степеням ϵ^2 , в отличие от случая $\gamma = 0$, и тогда:

$$\delta(\epsilon) = \sum \delta_n \epsilon^{2n}. \quad (11)$$

Однако полностью реализовать задачу во всем диапазоне величин γ не удастся, поскольку для малых $\gamma \ll 1$ (мощность снежного слоя не велика), для обеспечения заданной точности определения положения подвижной границы нужно использовать много членов ряда (11), но даже в предельном случае, когда $\gamma = 0$, коэффициенты ряда (11) не переходят в коэффициенты ряда (7), т. е. разложение меняется скачком, хотя из физических соображений следует, что точное решение уравнения (6) при $\gamma \Rightarrow 0$ должно стремиться к точному решению задачи без изоляции. Действительно уравнение (6) тогда, когда $\gamma = 0$ переходит в известное трансцендентное уравнение, полученное при решении классической автомодельной задачи Стефана. Таким образом, в рамках единого асимптотического разложения реализовать задачу с произвольной величиной мощности снежного покрова не удастся и требуется определенная ее дифференциация, в частности условное разделение потенциально возможной мощности снега (изоляция) на два случая: „тонкого“ и „толстого“. Несмотря на то, что такой прием обусловлен исключительно специ-

фикой используемого математического аппарата, он может быть физически интерпретирован.

Задача с „толстым“ слоем изоляции. Корень уравнения (6) будет описываться рядом со степенями ε^2 (11), где коэффициент δ_n задается

как: $\delta = \frac{1}{n!} \left(\frac{d}{d\varepsilon} \right)^{n-1} \left[\left(\frac{\delta}{f(\delta)} \right)^n \right] \Big|_{\delta=0}$, где первые коэффициенты ряда имеют вид:

$$\delta_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{C_M |t_n| \lambda_{сн}}{Q_\phi \lambda_M \operatorname{erf}(\beta/2 \sqrt{a_{сн}})} \left(\frac{a_M}{a_{сн}} \right)^{1/2} - \frac{C_T |t_0|}{Q_\phi} \left(\frac{a_T}{a_M} \right)^{1/2} \right) \text{ и}$$

$$\delta_2 = \frac{-\delta_1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{C_M |t_n|}{Q_\phi} \frac{C_{сн} \lambda_{сн}}{C_M \lambda_M \operatorname{erf}(\beta/2 \sqrt{a_{сн}})} + \frac{C_T |t_0|}{Q_\phi} \right).$$

Формула для нахождения β по (1) запишется в виде: $\beta = \sqrt{a_M} (\delta_1 + \delta_2) = \beta_1 + \beta_2$.

Задача с „тонким“ слоем изоляции. В связи с невозможностью реализации задачи для случая единого разложения воспользуемся приемом, примененным выше, а именно — разложением функций $\exp(z)$ и $\operatorname{erf}(z)$ в ряд. Подставив их приближенные значения в уравнение (6) и отбросив слагаемые, имеющие порядок $O(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)$, получаем для определения корней выражения (8) квадратное уравнение:

$$A\delta^2 + B\delta + C = 0, \quad (12)$$

$$A = 1 - \frac{\lambda_M}{\lambda_{сн}} \left(\frac{a_{сн}}{a_T} \right)^{1/2} \operatorname{erf}(\gamma/2 \sqrt{a_{сн}}),$$

$$B = \sqrt{\pi} \frac{\lambda_M}{\lambda_{сн}} \left(\frac{a_{сн}}{a_M} \right)^{1/2} \operatorname{erf}(\beta/\sqrt{a_{сн}}) + \frac{C_M |t_n|}{\sqrt{\pi} Q_\phi} \left(\frac{a_M}{a_T} \right)^{1/2} + \frac{C_T |t_0|}{Q_\phi} \left(\frac{a_T}{a_M} \right)^{1/2} > 0,$$

$$C = 2 \left(\frac{C_T |t_0| (a_T a_{сн})^{1/2} \lambda_M}{Q_\phi a_M \lambda_{сн}} \operatorname{erf}(\beta/\sqrt{a_{сн}}) - \frac{C_M |t_n|}{Q_\phi} \right) < 0.$$

На рис. 5 представлены результаты сравнения величин, рассчитанных по квадратному (12) и трансцендентному (6) уравнениям, показавшие, что предложенная формула (12) может быть применена для практического использования (погрешность не выше 15—20 %) в случаях, когда величина темпа снегонакопления γ менее $\gamma < 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{ч}^{1/2}$, теплопроводность пород в мерзлом и талом состояниях изменяется в диапазоне $0,6 < \lambda_M$ и $\lambda_T < 2 \text{ Вт/м} \cdot \text{град}$, а слоя снега $\lambda_{сн} \cdot 5 \cdot 10^{-2} < \lambda_{сн} < 2 \text{ Вт/м} \cdot \text{град}$, т. е. от значений, близких к теплопроводности воздуха до льда; значений температуры на поверхности промерзающих пород $t_n = -1 \div -20 \text{ }^\circ\text{C}$ и на глубине нулевых годовых амплитуд $t_0 > 0$. Формула применима при изменении параметра $\varepsilon_1 =$

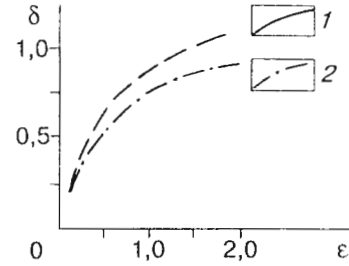


Рис. 5. Сравнение результатов расчета параметра δ , определяющего протяженность зоны промерзания при наличии снежного покрова от величины малого параметра ε .

1 — по формуле Фельдмана (6) (автомодельное решение); 2 — по формуле (12) (метод малого параметра).

$= C_M |t_n| / Q_\phi$ в области значений $0,01 < \varepsilon < 1,3$ соответствующих, например диапазону изменений величины теплоты фазовых переходов $12\,000 < Q_\phi < 336\,000 \text{ кДж/м}^3$, а также при соотношении параметров $\varepsilon_1/\varepsilon_2 > 0,5$. Таким образом, предложенная формула (12) применима для широкого спектра природных условий протекания процесса и имеет сходную структуру с формулами ряда авторов: Павлова, Чернядзева, Хакимова и др., рассматривающих задачи промерзания для квазистационарного приближения. Учет теплоизоляции осуществляется ими с помощью метода эквивалентного слоя. Заменяя наблюдаемую в натуральных условиях мощность снежного покрова $l_{сн}$ на эквивалентную (фиктивную) мощность l_3 , учитывающую термическое сопротивление этого покрова, была рассчитана по (9) глубина промерзания, где $S = l_{сн} \lambda_M / \lambda_{сн}$.

д. Влияние теплообмена с приземным слоем воздуха и продольно фильтрующейся жидкостью. Идея метода эквивалентного слоя может использоваться и для учета интенсивности теплообмена с приземным слоем воздуха. Тогда можно записать, что $l_3 = (\lambda_M / \lambda_B) l_B = \lambda_M / \alpha_T$, где l_B и λ_B — мощность эквивалентного слоя и его эффективная (с учетом конвекции) теплопроводность; α_T — коэффициент турбулентного теплообмена. Поскольку экспериментальное нахождение величин l_3 и λ_3 методически и технически затруднено, то, следуя работе [Павлов, 1975], глубину сезонного промерзания можно оценить с помощью соотношения типа (9), где $S = \lambda_M / \alpha_T$, а $\xi_{ст}^2 = 2 \lambda_M t_{вз}' \tau / Q_\phi$; здесь $t_{вз}' = t_{вз} + (R - LE) / \alpha_T$ — приведенная температура воздуха, R — радиационный баланс поверхности, LE — затраты тепла на испарение. Анализ указанных соотношений для оценки величины S показывает, что с точки зрения физического смысла она соответ-

стствует величине l_3 , характеризующей эквивалентную мощность некой фиктивной промерзающей насыпи, сложенной породами той же литологической разности, что и в натуре, которая учитывает алгебраическую добавку к величине ξ , полученной по формуле Стефана за счет наличия на поверхности покровов или изоляции; влияния конвективного теплообмена с приземным слоем воздуха или водным потоком поверхностного стока; влияния теплового потока из подстилающих пород. Аналогично может рассматриваться случай промерзания водоносного горизонта при учете взаимодействия фронта промерзания с продольно фильтрующейся водой. Здесь на дневной поверхности и на фронте промерзания $\xi(\tau)$ заданы граничные условия 3-го рода, интенсивность теплообмена на которых пропорциональна коэффициентам турбулентного теплообмена α_τ воздуха в приземном слое и $\alpha_{ж}$ — теплообмена с фильтрующейся жидкостью. На поверхности промерзающего массива имеется снежный покров со средней за период промерзания мощностью $l_{сн}$. Теплоперенос в покрове и мерзлой зоне пород происходит кондуктивным путем, а на границе раздела реализуются условия идеального контакта. Решение методом малого параметра с точностью до 2 членов ряда имеет вид:

$$\begin{aligned} \nu = & -\frac{1}{\psi^2} \left[\psi\eta - \ln \frac{1-\psi(1-\eta)}{1-\psi} \right] + \\ & + \varepsilon \left\{ \frac{2+\eta}{3(1+\eta)^2} \eta - \frac{2}{3\psi} \ln \frac{1-\psi(1+\eta)}{1-\psi} + \right. \\ & \left. + \frac{\psi+2}{3} \left[\frac{\eta}{\eta+1} + \psi \ln \frac{(1+\eta)(1-\psi)}{1-\psi(1+\eta)} \right] \right\} + \varepsilon^2 \{ \dots \}, \quad (13) \end{aligned}$$

где $\psi = \frac{\alpha_{ж}(t_{ж} - t_3)}{\lambda_M B (t_{вз} - t_n)}$; $B = \frac{1}{\lambda_M [(1/\alpha_\tau) + (l_{сн}/\lambda_{сн})]}$; $\nu = a_M \tau B^2 \varepsilon$; $\eta = \xi B$; $\varepsilon = \frac{C_M (t_3 - t_n)}{Q_\phi + C_{ж} (t_{ж} - t_3)}$; $t_{ж}$ — среднеобъемная температура фильтрующейся воды; ν, η, ψ — безразмерные параметры; ε — малый параметр; B — мощность эквивалентного слоя (l_3).

Сравнение расчетных данных, полученных по (13) и по уравнению из [Лукьянов и др., 1957], при наличии продольной фильтрации показало удовлетворительное совпадение в диапазоне $\varepsilon \leq 0,5$ при использовании двух членов асимптотического разложения (рис. 6).

е. Динамика промерзания при произвольном виде зависимости мощности снежного покрова и температуры дневной поверхности от времени. Задача промерзания при произвольном виде зависимостей температуры поверхности и мощности покрова от времени имеет вид:

$$\frac{\partial t_{сн}(x, \tau)}{\partial \tau} = a_{сн} \frac{\partial^2 t_{сн}(x, \tau)}{\partial x^2}, \quad (14)$$

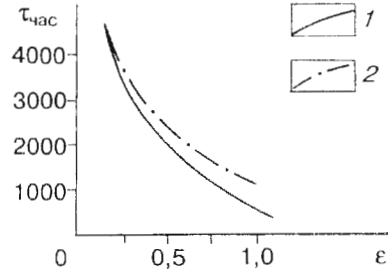


Рис. 6. Сравнение расчетных значений времени промерзания τ фиксированной зоны мощностью ξ при наличии осевой фронту фильтрации воды, от величины малого параметра ε .

1 — по модифицированной формуле Лукьянова—Головки; 2 — методом малого параметра для двух членов ряда (15).

$$\frac{\partial t_M(x, \tau)}{\partial \tau} = a_M \frac{\partial^2 t_M(x, \tau)}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial t_T(x, \tau)}{\partial \tau} = a_T \frac{\partial^2 t_T(x, \tau)}{\partial x^2};$$

$$t_{\text{дн.п.}}(-l_{сн}(\tau), \tau) = \varphi(\tau), \quad (15)$$

$$t_T(x, 0) = \psi(x), \quad t_M(0, \tau) = t_n(0, \tau),$$

$$t_M(\xi(\tau), \tau) = t_T(\xi(\tau), \tau) = t_3,$$

$$\lambda_M \frac{\partial t_M}{\partial x}(0, \tau) = \lambda_{сн} \frac{\partial t_{сн}}{\partial x}(0, \tau),$$

$$\pm Q_\phi \frac{d\xi}{d\tau} = \lambda_\tau \frac{\partial t_T}{\partial x} \Big|_{x=\xi} - \lambda_M \frac{\partial t_M}{\partial x} \Big|_{x=\xi}, \quad (16)$$

$$(t_T(x, \tau) - gx - t_3)^2 dx < \infty$$

$$\text{или } |t_T(x, \tau)| < M. \quad (17)$$

На нижней границе условие (17) задает либо геотермический градиент, либо предполагается ограниченность температуры. Считается, что начальные и граничные условия являются гладкими функциями и, если это необходимо, выполняются условия их согласования. Решение такой общей задачи рассматривалась в [Комаров и др., 1986, 1987]. При этих предпосылках известными методами можно доказать теорему существования и единственности решения данной задачи. Как и для автомодельной задачи (см. д) в рамках единого асимптотического разложения решить задачу не удастся и требуется определенная дифференциация, условное разделение потенциально возможной мощности снежного покрова на два случая: „тонкого“ и „толстого“ слоя изоляции. Для этого введем безразмерный малый параметр ε следующим образом. Заменяем толщину слоя изоляции $l_{сн}(\tau)$ в условии (15) на функцию $\varepsilon^\chi l_{сн}(\tau)$, где χ пробегает числа 0, 1, а правую часть условия Стефана (16) умножим на ε^2 (знак „плюс“ соответствует случаю протаивания, а „минус“ — промерзания). Выбор

числа χ зависит от скорости изменения функции $l_{\text{сн}}(\tau)$ и $\varphi(\tau) - t_3$ в окрестности точки $\tau = 0$. Случай, когда $\chi = 1$, условно назовем задачей с „тонким“ слоем, а когда $\chi = 0$ — с „толстым“ слоем изоляции. Определение „тонкий“ или „толстый“ следует рассматривать как энергетическое, а не геометрическое понятие, характеризующее мощность слоя изоляции. В случае „толстого“ слоя влияние темпа и характера изменения температурных условий на поверхности несущественно сказывается на динамике фронта промерзания (оттаивания) и наоборот, оказывает определяющее влияние в случае „тонкого“ слоя. Слой изоляции считается „тонким“, если определенный параметр задачи будет меньше или одного порядка с величиной $8\lambda_{\text{сн}}^2/\lambda_{\text{м}} Q_{\text{ф}}$ [Комаров и др., 1987]. Делая ряд преобразований, перепишем последнее утверждение в виде критерияльного уравнения:

$$1/Fo = 8(\lambda_{\text{сн}} C_{\text{сн}}/\lambda_{\text{м}} C_{\text{м}}) Ku, \quad (18)$$

где критерий Фурье $Fo = a_{\text{сн}} T/P_{\text{сн}}(\tau)$, Ku — безразмерный параметр, равный $Ku = E = C_{\text{м}} \Omega/Q_{\text{ф}} T$, здесь $\Omega = \int |t_3 - \varphi(\tau)| d\tau$ — охлаждающий импульс (морозоградусочасы).

Параметр E является аналогом „малого параметра“, записанным для случая, когда температура на поверхности — произвольная функция времени, и он может рассматриваться как специфический критерий. Этот критерий предлагается назвать в честь известного мерзлотооведа В. А. Кудрявцева (предлагается впервые). Он характеризует соотношение в годовых теплооборотах количества тепла, идущего на перестройку температурного поля в зонах, к теплу на фазовые переходы и является аналогом критерия Стефана, в том числе для случая периодически установившегося режима. Соотношение (18) не связано со спецификой только годовых колебаний температуры и может быть обобщено на случай произвольной частоты колебаний равной $2\pi/T$. Тогда применимость квазистационарного приближения для нахождения динамики температурных полей обусловлена не только требованием о преобладающем влиянии в общем энергетическом балансе, доли тепла идущего на фазовые переходы, но и требованием чтобы время релаксации температурных полей в промерзающей (протаивающей) зоне было несоизмеримо с периодом колебаний температуры на поверхности. Критерий Ku содержит опосредованно в своей структуре все четыре основных классификационных признака типов сезонного промерзания — оттаивания пород В. А. Кудрявцева. Таким образом, согласно (18), выбор расчетных схем для „тонкого“ или „толстого“ слоя обусловлен не только вертикальной протяженностью снежного покрова, но и климатическими

факторами, типом пород и их влажностью, а также в целом, структурой и интенсивностью теплооборотов в слое нулевых годовых амплитуд.

Задача с „тонким“ слоем изоляции. Предполагая, что решение вспомогательной задачи с параметром можно представить в виде степенных рядов:

$$dt(x, \tau, \varepsilon) \sim \sum t_{i,n}(x, \tau) \varepsilon^n, \quad i = 0, 1, 2, \\ \xi(\tau) \sim \sum \xi_n(\tau) \varepsilon^n.$$

Подставляя эти ряды в условия задачи и выделяя члены при одинаковых степенях малого параметра, отыскиваем значения коэффициентов рядов. Первый коэффициент находится из решения задачи Коши:

$$\frac{d\xi_1(\tau)}{d\tau} = \frac{\lambda_{\text{м}} |t_3 - t_{\text{дн.п.}}(\tau)|}{Q_{\text{ф}} [\xi_1(\tau) + (\lambda_{\text{м}}/\lambda_{\text{сн}}) l_{\text{сн}}(\tau)]}, \quad \xi(0) = 0, \quad (19)$$

которое в квадратурах не выписывается, и задача реализуется численными методами. Однако для простых частных случаев (некоторые из них рассматривались выше) можно привести частные решения задачи. Так при отсутствии изоляции, когда $l_{\text{сн}}(\tau) \equiv 0$, уравнение (19) при интегрировании дает формулу Стефана:

$$\xi_1(\tau) = \left(\frac{2\lambda_{\text{м}}}{Q_{\text{ф}}} \int_0^{\tau} |t_3 - t_{\text{н}}(\tau')| d\tau' \right)^{1/2} = (2\lambda_{\text{м}} \Omega/Q_{\text{ф}})^{1/2}.$$

В случае, когда температура дневной поверхности и мощность снежного покрова связаны соотношением $l_{\text{сн}}(\tau) = \beta (\int |t_3 - \varphi(\tau)| d\tau)^{1/2}$, и если $\varphi(\tau) = \text{const}$, т. е. температура дневной поверхности принимается постоянной (среднеинтегральной за период промерзания), то имеем параболический закон изменения мощности покрова $l_{\text{сн}}(\tau) = \gamma (|t_3 - \varphi| \tau)^{1/2}$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что решение задачи (19), удовлетворяющее условию $\xi \geq 0$, имеет вид: $\xi_1(\tau) = \beta (\int |t_{\text{ф}} - \varphi(\tau')| d\tau')^{1/2}$, где β определяется как $\beta = [(\lambda_{\text{м}} \gamma / 2\lambda_{\text{сн}})^2 + (2\lambda_{\text{м}} / Q_{\text{ф}})]^{1/2} - \lambda_{\text{м}} \gamma / 2\lambda_{\text{сн}}$.

Когда мощность снежного покрова принимается осредненной за период промерзания постоянной величиной, то (19) переходит в (12). Для случая, когда $t_{\text{дн.п.}}$ и $l_{\text{сн}}$ связаны с временем произвольной параболической зависимостью $\varphi(\tau) = t_3 + M \tau^n$, $n = 0, 1$, $l_{\text{сн}}(\tau) = \gamma \tau^{(n+1)/2}$, тогда первый коэффициент разложения в ряд равен $\xi_1(\tau) = \beta \tau^{(n+1)/2}$, где $\beta = \{(\lambda_{\text{м}} \gamma / 2\lambda_{\text{сн}})^2 [|M| / (n+1)] + (2\lambda_{\text{м}} / Q_{\text{ф}}) \}^{1/2} - (\lambda_{\text{м}} \gamma / 2\lambda_{\text{сн}}) [|M| / (n+1)]^{1/2}$.

Для случая, когда $t_{\text{дн.п.}}(\tau) = t + A \sin \omega \tau$, $l_{\text{сн}}(\tau) = \beta \sin(\omega \tau / 2)$, тогда $\xi_1(\tau) = D \sin(\omega \tau / 2)$, где D определяется из уравнения:

$$\beta = \{ (\lambda_{\text{м}} \gamma / 2\lambda_{\text{сн}})^2 (\omega / 2 |A|) + (2\lambda_{\text{м}} / Q_{\text{ф}}) \}^{1/2} - (\lambda_{\text{м}} \gamma / 2\lambda_{\text{сн}}) [(\omega / 2 |A|)]^{1/2}.$$

Задача Стефана с „толстым“ слоем изоляции. Положим параметр χ в условиях (14) и (15) равным 0. Решение задачи ищем в виде рядов:

$$t_i(x, \tau, \varepsilon) \sim \sum t_{i,n}(x, \tau)\varepsilon^{2n} \text{ и } \xi(\tau, \varepsilon) \sim \sum \xi_n(\tau)\varepsilon^{2n}.$$

Подставляя ряды в условия задачи и выделяя коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем систему уравнений для нахождения последующих коэффициентов разложения [Комаров и др., 1987]. Полученные выражения для них в явном виде не выписываются, а реализуются численными методами. Следует отметить, что для этого спектра задач их нулевое приближение значительно хуже согласуется с моделью снежного покрова как термического сопротивления в силу малой чувствительности динамики фронта к закономерностям снегонакопления и другим факторам, влияющим на интенсивность протекания процесса.

ВЫВОДЫ

1. Показано, что ряд известных в геокриологии аналитических соотношений, полученных Стефаном, Лейбензоном, Крыловым, Лукьяновым и Головко, Фельдманом могут быть получены, как частный случай из более общего решения методом малого параметра, позволяя оценить пределы применимости, порядок погрешности и уточнить физические предпосылки используемых моделей. Последнее касается и ряда формул, полученных с помощью квазистационарного приближения Балобаевым, Войтковским, Павловым.

2. Используя введенный малый параметр, выявлены предельные случаи, когда приближенная формула Кудрявцева, применительно к случаю отсутствия температурной сдвижки, упрощается, в частности, сводится к формуле типа Лейбензона; другой случай реализуется, когда величины амплитуды и среднегодовой температуры близки.

3. В рамках единого асимптотического разложения решить задачу с произвольным видом функции снегонакопления во времени не удается и требуется определенная дифференциация за-

дачи. Найдены условия предельного перехода от одного типа асимптотического разложения к другому, которые количественно выражаются с помощью нового критерия. Его предлагается назвать в честь известного мерзлотоведа В. А. Кудрявцева, характеризующего соотношение в годовых теплооборотах доли идущей на перестройку температурного поля в зонах к доле идущей на фазовые переходы. Критерий содержит опосредованно в своей структуре все четыре основные признака соответствующей классификации типов сезонного промерзания-оттаивания.

Литература

- Балобаев В. Т. Расчет глубины протаивания с учетом внешнего теплообмена // Сезонное протаивание и промерзание грунтов на территории Северо-Востока СССР. М., Наука, 1966, с. 47—57.
- Войтковский К. Ф. Расчет сооружений из льда и снега. М., Изд-во АН СССР, 1954, 136 с.
- Вотякова И. Н. Сравнительная оценка формул для расчета глубины сезонного промерзания-протаивания грунта // Экспериментальные исследования процессов теплообмена в мерзлых горных породах. М., Наука, 1972.
- Гречищев С. Е., Частотин Л. В., Шур Ю. Л. Криогенные физико-химические процессы и их прогноз. М., Недра, 1980, 383 с.
- Козбода Л. А. Методы решения нелинейных задач теплопроводности. М., Наука, 1957, 228 с.
- Комаров И. А., Типенко Г. С. Решение методом малого параметра одномерной задачи Стефана с фиксированным числом фронтов // Всес. конф. по аналитическим методам расчета процессов тепло- и массопереноса. Душанбе, 1986, 250 с.
- Комаров И. А., Типенко Г. С. О приближенном решении задачи промерзания-оттаивания горных пород при наличии на поверхности слоя изоляции // Геокриологические исследования. М., Изд-во МГУ, 1987, с. 260—280.
- Лукьянов В. С., Головко М. Д. Расчет глубины промерзания грунтов. М., Трансжелдориздат, 1957, 164 с.
- Основы геокриологии. Ч. 1. М., Изд-во АН СССР, 1959, 460 с.
- Основы мерзлотного прогноза при инженерно-геологических исследованиях / Ред. В. А. Кудрявцев. М., Изд-во МГУ, 1974, 432 с.
- Павлов А. В. Теплообмен почвы с атмосферой в северных и умеренных широтах территории СССР. Якутск, ЯКИ, 1975, 302 с.
- Фельдман Г. М. Прогноз температурного режима грунтов и развития криогенных процессов. М., Недра, 1977, 254 с.

Поступила в редакцию
21 января 1997 г.