НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
КРИОСФЕРА ЗЕМЛИ

Криосфера Земли, т. VIII, № 2, с. 74–81

СНЕЖНЫЙ ПОКРОВ И ЛЕДНИКИ

УДК 551.322:533

К КОЭФФИЦИЕНТУ ДИФФУЗИИ ВОДЯНОГО ПАРА В СНЕЖНОМ ПОКРОВЕ

Р. И. Гаврильев

Институт мерзлотоведения им. П. И. Мельникова СО РАН, 677010, Якутск, Мерзлотная, 1, Россия

Предложен метод оценки коэффициента диффузии водяного пара в снеге с учетом его дисперсной структуры. Основу модели составляет расчетная кубическая ячейка, содержащая внутри сферическую частицу с контактными поверхностями на вершинах. Показано, что коэффициент диффузии водяного пара в снеге зависит от его плотности и структуры (через тепловые контакты частиц). В зависимости от характера контактов между частицами коэффициенты диффузии пара в снеге и в воздухе могут различаться существенно (вплоть до двух раз при отсутствии контактов между частицами).

Снег, пар, воздух, температура, концентрация пара и воздуха, поток пара, коэффициент диффузии

ON THE DIFFUSION COEFFICIENT OF WATER VAPOUR IN SNOW COVER

R. I. Gavriliev

Melnikov Permafrost Institute SB RAS, 677010, Yakutsk, Merzlotnaya str., 1, Russia

A method for determining the diffusion coefficient of water vapour in snow is proposed, taking into account the snow dispersion structure. The basis of the numerical model is the estimated cubic cell containing a spherical particle with the contact surfaces on apexes. It is revealed that the diffusion coefficient of water vapour in snow depends on snow density and structure (through thermal contact between particles). The diffusion coefficient of vapour in snow can significantly differ from that in air, depending on the nature of the contacts between the particles (up to two-fold difference if there is no inter-particle contact).

Snow, vapour, air, temperature, vapour and air concentration, vapour flux, diffusion coefficient

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в литературе накоплено большое количество экспериментальных данных по коэффициенту диффузии (D) водяного пара в снежном покрове [*Yosida, 1950; Павлов, 1962; Кувaева, 1966; Морозов, 1967; Савельев и др., 1967; Коломыц, 1971; Федосеева, Федосеев, 1988*]. Эти данные характеризуются большими разногласиями как в величинах D, так и в выводах авторов относительно наличия или отсутствия зависимости коэффициента диффузии пара в снеге от его температуры, плотности и структуры. Так, измеренные в опытах осредненные значения D колеблются в пределах от 0,39 до 1,10 см^2/с, хотя авторы пользовались одними и теми же стандартными методами: кристаллизатора и кювет. Некоторые авторы [*Woodside, 1958; Дюнин, 1961*] в теоретических расчетах тепло- и массопереноса в снеге исходили из коэффициента диффузии воздуха, равного 0,20 см^2/с при 0 °С, считая, что эти параметры для пара и воздуха примерно равны. Однако экспериментальный материал говорит об обратном: измеренная величина коэффициента диффузии пара в снеге во много раз (вплоть до 4 раз — у Ц. Иосиды) превышает коэффициент молекулярной диффузии воздуха. Это явление Ц. Иосида объясняет тем, что перенос водяного пара в снежном покрове осуществляется не только за счет микроскопической диффузии по поровым пространствам (свободная диффузия в воздухе), но и как бы прохождением через сами снежинки путем конденсации на одной их стороне и испарения с другой (макроскопическая или кристаллизационная). Однако в обоих случаях механизм переноса пара в поровом пространстве снега остается одним и тем же, сводящимся к молекулярной (свободной) диффузии паровоздушной смеси. В общем, этот вопрос требует своего дальнейшего развития и уточнения. Нам кажется, что столь большие различия в величинах коэффициентов диффузии пара в снеге и молекулярной диффузии воздуха обусловлены дисперсной структурой снега, так как испарение пара на самом деле осуществляется со всей наружной поверхности частицы, а расчет его потока производится по площади основания частицы, которая заведомо меньше пло-

© Р.И. Гаврильев, 2004

щади ее испаряющей поверхности, т.е. как бы происходит искусственное увеличение потока пара.

Проанализируем весь баланс массопереноса в снеге. Начнем с уточнения уравнения переноса пара в снежном покрове.

УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА ПАРА В СНЕЖНОМ ПОКРОВЕ И ВНУТРИ КРИСТАЛЛИЗАТОРА

Поскольку охлаждение снега происходит сверху, то концентрация пара увеличивается сверху вниз. При этом потоки пара и тепла движутся в одну сторону — от почвы к поверхности снега. В то же время в обратном направлении происходит перемещение холодного воздуха под действием силы тяжести. По всей высоте снежного покрова соблюдается условие постоянства общего давления паровоздушной смеси, т. е.

$$p = p_1 + p_2 = \text{const}, \qquad (1)$$

где p_1 и p_2 — парциальные давления пара (1) и воздуха (2).

Предположим, что почва влагонасыщенна (например, после обильных дождей осенью, перед зимним промерзанием почвы) или снег лежит на слое льда. Тогда нижняя поверхность снега становится непроницаемой преградой для воздуха, и перемещающийся вниз воздух будет стремиться создавать избыточное давление. Однако условие (1) должно соблюдаться всегда, для чего необходимо, чтобы вся паровоздушная смесь двигалась вверх в виде конвективного переноса с некоторой скоростью $v_к$. В верхних горизонтах снега избыток насыщенного пара постоянно устраняется конденсацией его перенасыщенной части на холодных поверхностях частиц снега. Таким образом, в снеге постоянно устанавливается равновесное распределение концентрации пара и воздуха в соответствии с профилем температуры по высоте пространства (рис. 1).

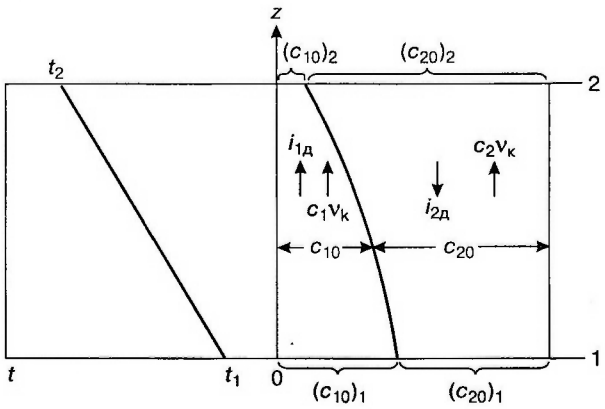

Рис. 1. Схема распределения температуры (t), относительной концентрации пара (c_{10}) и сухого воздуха (c_{20}) по высоте (z) снежного покрова:

1 — поверхность почвы, *2* — поверхность снега.

В схеме на рис. 1 для удобства концентрация пара (1) и воздуха (2) выражена в относительных величинах: $c_{10} = c_1/c$ и $c_{20} = c_2/c$ (здесь c — общая концентрация паровоздушной смеси). Поскольку $c_1 + c_2 = c$ и $c_{10} + c_{20} = 1$, то $\partial c_{10}/\partial z = -\partial c_{20}/\partial z$. Пусть на концах пространства заданы постоянные температуры t_1 и t_2 ($t_1 < t_2$). Такие условия соблюдаются и в лабораторных экспериментах.

Показанную на рис. 1 схему можно представить и как пространство внутри кристаллизатора. Кристаллизатор представляет собой пластмассовый сосуд с открытым верхом размерами 9,6 см в диаметре и 6,5 см по высоте. Для измерений кристаллизатор устанавливают вверх дном на поверхности почвы или слое снега. Водяной пар диффундирует из почвы или слоя снега вверх и конденсируется на дне кристаллизатора. По весу конденсата определяют количество диффундировавшего пара за определенный промежуток времени. Поделив его на площадь дна кристаллизатора, рассчитывают удельный поток пара, из которого на основе уравнения Фика (по перепаду концентрации пара на концах кристаллизатора) находят коэффициент диффузии пара в снеге.

Суммарный поток пара (без учета эффекта воздействия на его молекулы силы тяжести) равен сумме диффузионного и конвективного потоков:

$$i_1 = i_{1д} + i_{1к}. \qquad (2)$$

Диффузионный поток пара в установившемся режиме описывается уравнением Фика:

$$i_{1д} = -D_{12}\frac{\partial c_1}{\partial z} = -D_{12}c\frac{\partial c_{10}}{\partial z} = -D_{12}c\frac{\partial c_{10}}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial z}, \qquad (3)$$

где D_{12} — коэффициент диффузии пара в воздух.

Конвективный поток пара, создаваемый движущимся вверх нагретым воздухом в результате вытеснения его вновь поступающей порцией холодного воздуха, равен:

$$i_{1к} = c_1 v_к. \qquad (4)$$

Скорость $v_к$ можно найти из условия сохранения количества движения, согласно которому поток холодного воздуха, перемещаемый вниз диффузией $i_{2д} = -c_2 v_2 = -D_{21}c\partial c_{20}/\partial z$ (здесь D_{12} — коэффициент диффузии воздуха в пар) при наличии непроницаемого упора, вызывает движение паровоздушной смеси снизу вверх со скоростью $v_к$, т. е.:

$$c_2 v_2 = (c_1 + c_2)v_к, \qquad (5)$$

где v_2 — скорость движения массы холодного воздуха вниз в результате диффузионного переноса.

Из написанных соотношений найдем скорость $v_к$ следующим образом:

$$v_к = D_{21}\frac{\partial c_{20}}{\partial z} = -D_{12}\frac{\partial c_{10}}{\partial z}, \qquad (6)$$

где $D_{12} = D_{21} = D_м$, $D_м$ — коэффициент молекулярной взаимодиффузии воздуха и пара.

Таким образом, для переноса пара в воздушном пространстве кристаллизатора, с учетом выражения (2), окончательно получим соотношение:

$$i_1 = -D_м(1 + c_{10})\frac{\partial c_1}{\partial z}. \quad (7)$$

В случае снежного покрова в уравнении (7) вместо $D_м$ подразумевается коэффициент диффузии пара в снеге $D_{сн}$.

В формуле (7) параметр c_{10} выражает эффект конвективного переноса пара. По закону Клапейрона—Менделеева имеем:

$$c_1 = \frac{p_1\mu_1}{R^*T}, \quad (8)$$

$$c = \frac{p\mu}{R^*T}, \quad (9)$$

где R^* — универсальная газовая постоянная; μ_1 и μ — молекулярный вес пара и паровоздушной смеси. Тогда:

$$c_{10} = \frac{p_1}{p}\frac{\mu_1}{\mu}. \quad (10)$$

Молекулярный вес паровоздушной смеси описывается соотношением [*Лыков, 1972*]:

$$\frac{1}{\mu} = c_{10}\left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2}\right) + \frac{1}{\mu_2}. \quad (11)$$

В снеге водяной пар находится в насыщенном состоянии. Тогда p_1 можно заменить упругостью E насыщенного пара надо льдом [*Курс метеорологии..., 1951*]:

$$E = E_0 e^{22{,}46t/T}, \quad (12)$$

где $E_0 = 6{,}1 \cdot 10^2$ Па — упругость насыщенного пара при 0 °С. При этом $p_{10} = p_1/p = E/p$.

Количественные расчеты по формулам (10) и (12) показывают, что эффект дополнительного переноса пара под воздействием конвективного перемещения холодного воздуха вниз не превышает 1 % от общего потока. Таким образом, пришли к выводу, что в оценке переноса пара в снежном покрове вполне можно ограничиться уравнением Фика (3).

Теперь рассмотрим особенности испарения пара в снежном покрове.

СХЕМА МОДЕЛИ ИСПАРЕНИЯ И ДИФФУЗИИ ПАРА В СНЕГЕ

Движение пара с поверхности тела описывается также уравнением Фика. При этом отправными точками являются концентрации пара на поверхности частицы и в окружающей среде.

Поскольку объемные концентрации пара в воздухе очень малы, то процесс возгонки снега является процессом диффузионным. Для его изучения могут быть использованы принципы диффузионной теории испарения Д. Максвелла [*Дюнин, 1961*]. При этом общее уравнение для скорости испарения тела произвольной формы имеет вид:

$$\frac{dM}{dt} = -\int_S D_0 \operatorname{grad} c\, \overline{dS}, \quad (13)$$

где $\frac{dM}{dt}$ — диффузионный поток пара через поверхность тела; D_0 — обобщенный коэффициент диффузии пара, зависящий от степени молекулярной диффузии и характера движения среды относительно тела; S — поверхность тела; $\overline{dS}$ — вектор элемента поверхности тела; c — весовая концентрация пара в воздухе.

Строгая теория испарения твердых тел чрезвычайно сложна, поэтому обычно рассматривается только случай стационарного испарения: $\frac{dM}{dt} = \text{const}$. Из формулы (13) следует, что количество пара зависит от площади поверхности испарения. Чем больше удельная поверхность тел, тем интенсивнее в них образование пара. Дисперсная структура тел способствует большему развитию процессов испарения влаги. Этим можно объяснить наблюдавшуюся большую разницу в величинах коэффициента диффузии пара в снеге и в воздухе.

Первая попытка учета структуры снега при изучении диффузии пара была предпринята М.Р. де Кервеном [*1966*]. Им рассчитаны простейшие структуры из параллельно и последовательно расположенных ледяных и воздушных прослоек. На самом деле снег имеет сложную многоветвистую ажурную структуру с многочисленными контактами между частицами. Примерно такая же структура рассматривается в модели с изменяющейся формой частиц при расчете коэффициента теплопроводности снега [*Gavrilyev, 1996; Гаврильев, 1998*]. Модель состоит из трех взаимопересекающихся эллипсоидов вращения в кубической ячейке и вполне адекватно отображает метаморфические изменения структуры снега в полном цикле превращения его с момента первых твердых осадков до состояния ледников. При этом, в зависимости от пористости снега, частицы принимают самую разнообразную форму: игольчато-крестовидную, изъеденную, сферическую, угловатую и выпукло-кубическую. Здесь мы ограничимся только одним из частных случаев этой модели, когда частицы имеют сферическую форму (рис. 2). На вершинах частиц имеются контактные поверхности (пятна контакта) радиуса $r_к$. В основании ($y = 0$) и на вершине шара ($y = R$) поддерживаются постоянные температуры t_1 и t_2, которые обусловливают также постоянные концентрации пара c_1 и c_2. Поскольку перенос пара — явление поверхностное, то в направлении теплового потока по оси $0y$ задается распределение концентрации пара по всей поверхности шара $c(y)$ или $c(x)$ в пределах от c_1 до c_2.

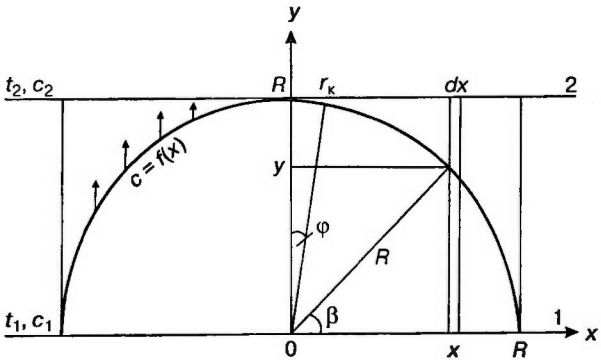

Рис. 2. Схема модели расчета испарения, диффузии пара и температуры снега.

В указанной на рис. 2 схеме поток пара в цилиндрической области радиуса R, включающей половину шаровой частицы, равен:

$$i = -D_м \int_{S_к}^{S} \frac{c(y) - c_1}{y} dS = -2\pi D_м \int_{r_к}^{R} \frac{c(x) - c_1}{\sqrt{R^2 - x^2}} x dx, \quad (14)$$

где $y = \sqrt{R^2 - x^2}$; $dS = 2\pi x dx$.

Считается, что коэффициент молекулярной диффузии пара $D_м$ не зависит от температуры.

ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ МОДЕЛИ

Распределение концентрации пара на поверхности частицы $c(x)$ определяется ее температурой. Последняя может быть оценена в первом приближении на основе решения, полученного М.Г. Каганером [*1966*] для шара с двумя контактными площадками на вершинах (см. рис. 2). В задаче допускается, что передача тепла осуществляется только через контактные поверхности частиц. Считается, что через среду в поровом пространстве тепло не пропускается. Примерно такая же картина наблюдается и в снеге, так как коэффициент теплопроводности воздуха несоизмеримо мал (0,022 Вт/(м·К)) по сравнению с коэффициентом теплопроводности льда (2,25 Вт/(м·К)). При этом решение задачи имеет вид [*Каганер, 1966*]:

$$t = \frac{q}{\lambda_т} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} [P_{2n}(\cos\varphi) - P_{2n+2}(\cos\varphi)] \rho^{2n+1} P_{2n+1}(\cos\varphi) \quad (15)$$

или

$$t = \frac{q}{\lambda_т} \Big[\frac{3}{2} \alpha^2 \rho \cos\beta + \frac{7}{16} (2\alpha^2 - 5\alpha^4) \times \rho^3 (5\cos^3\beta - 3\cos\beta) + \frac{1}{128} (88\alpha^2 - 308\alpha^4 + 231\alpha^6) \times \rho^5 (63\cos^5\beta - 70\cos^3\beta + 15\cos\beta) + \ldots \Big], \quad (16)$$

где $\alpha = r_к/R$ — безразмерный радиус контактной площадки, q — удельный тепловой поток через пятно контакта, $\lambda_т$ — коэффициент теплопроводности материала частицы, $\rho = r/R$ — безразмерный текущий радиус шаровой области, r — текущий радиус шаровой области, R — радиус шара; β — текущий угол, φ — угол пятна контакта, $P_{2n}(\cos\varphi)$, $P_{2n+1}(\cos\varphi)$ и $P_{2n+2}(\cos\varphi)$ — полиномы Лежандра первого рода $2n$, $2n + 1$ и $2n + 2$-го порядков.

В формулах (15) и (16) входящие параметры связаны следующими соотношениями: $\alpha = \sin\varphi$, $\cos\varphi = \sqrt{1 - \alpha^2}$, $\cos\beta = x/R$.

При $\rho = 1$ из формул (15) и (16) получается распределение температуры на поверхности шара $t_п$ в зависимости от угла β или координаты поверхности шара x/R в пределах их изменений: $\varphi \le \beta \le \pi/2$ и $\alpha \le x/R \le 1$. Уточним величину α. Из соотношений в работе [*Гаврильев, 1998*] для сферической формы частиц следует, что $\alpha = 0{,}25$. По экспериментальным данным К.Ф. Войтковского [*1977*], Д. Андерсона и К. Бенсона [*1966*], величина α изменяется в пределах от 0,10 до 0,15. В практических расчетах выберем среднюю величину α, равную 0,20.

В формулах (15) и (16) неудобный для пользования параметр $q/\lambda_т$ выразим через осредненную температуру пятна контакта $t_{ср}^{пк}$, исходя из следующего соотношения [*Каганер, 1966*]:

$$t_{ср}^{пк} = \frac{1}{\lambda_т} F(\varphi), \quad (17)$$

где

$$F(\varphi) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} [P_{2n}(\cos\varphi) - P_{2n+2}(\cos\varphi)] \times [1 + P_{2n+1}(\cos\varphi)]. \quad (18)$$

В центральной (экваториальной) плоскости ($y = 0$ и $\beta = \pi/2$) температура равна 0, и поэтому в формулах (15) и (16) t можно заменить перепадом температур относительно температуры центральной плоскости $\Delta t = t - t_1$. При $\alpha = 0{,}2$ имеем $F = 0{,}1835$. Тогда относительный перепад температур по поверхности шара равен:

$$\frac{\Delta t_п\left(\frac{x}{R}\right)}{\Delta t_{п\,max}} = 0{,}1835\,[0{,}0600P_1(\cos\beta) + 0{,}042P_3(\cos\beta) + 0{,}0378P_5(\cos\beta) + 0{,}0319P_7(\cos\beta) + 0{,}0258P_9(\cos\beta) + 0{,}00092P_{11}(\cos\beta) + \ldots], \quad (19)$$

где $0 \le \cos\beta \le 0{,}9798$; $\Delta t_{п\,max} = t_1 - t_2$.

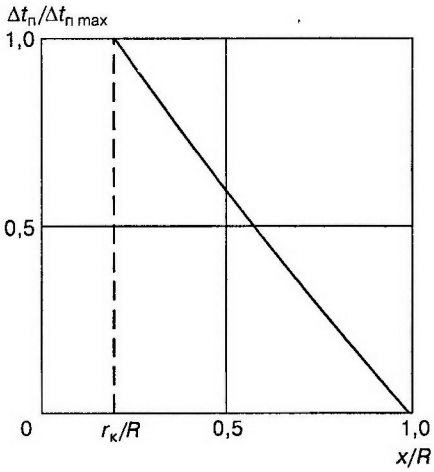

Рис. 3. Распределение относительного перепада температур по поверхности шара.

Результаты расчетов параметра $\Delta t_п(x/R) \times \times 1/\Delta t_{п\,max}$ приведены на рис. 3. Видно, что получается почти линейная зависимость типа:

$$\frac{\Delta t_п\left(\frac{x}{R}\right)}{\Delta t_{п\,max}} = 1 - 1{,}25\left(\frac{x}{R} - 0{,}2\right). \qquad (20)$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КОНЦЕНТРАЦИИ ПАРА В МОДЕЛИ И ДИФФУЗИОННЫЙ ПОТОК ПАРА В СНЕГЕ

Учитывая насыщенное состояние пара в снеге, его концентрацию можно оценить по формуле:

$$c = \frac{c_0 T_0}{T} \exp\left(\frac{22{,}46t}{T}\right), \qquad (21)$$

где $c_0 = E_0\mu_1/R^*T_0$ — концентрация пара при температуре T_0.

Исходя из линейного распределения температуры на поверхности шара при $\Delta t_{п\,max} = 20$ °С, по формуле (21) рассчитано распределение относительной концентрации пара c/c_0 в зависимости от безразмерного параметра x/R (рис. 4).

В общем случае перепад концентрации пара на поверхности шара относительно концентрации пара в плоскости расположения пятна контакта c_2 можно задавать функцией типа:

$$c(x) - c_2 = \frac{c_1 - c_2}{(1-\alpha)^n}\left(\frac{x}{r} - \alpha\right)^n, \qquad (22)$$

где $\alpha \le \frac{x}{R} \le 1$; $n = 0, 1, 2, 3, ...$

Тогда поток пара в цилиндрической области рассчитывается по следующей формуле:

$$i = -\frac{2\pi D_м(c_1 - c_2)}{(1-\alpha)^n}\int_{r_к}^{R}\frac{\left(\frac{x}{R} - \alpha\right)^n x dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}. \qquad (23)$$

Для упрощения расчетов интеграла в формуле (23) при не очень больших размерах пятна контакта ($\alpha \le 0{,}2$) величину α можно принять равной нулю. При этом существенной ошибки не будет, так как доля испарения пара в узком приконтактном пространстве между частицами, по сравнению с общим потоком, незначительна. Таким образом, оценка потока пара сводится к вычислению интеграла:

$$B = \frac{1}{R^n}\int_0^R \frac{x^{n+1}dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}. \qquad (24)$$

Можно привести следующие значения интеграла B при различных значениях n:

$n = 0,\ B = R.$

$n = 1,\ B = \pi R/4.$

$n = 2,\ B = 2R/3.$

$n = 3,\ B = 3\pi/16.$

На рис. 4 отражена кривая зависимости параметра $[c(x) - c_2]/(c_1 - c_2)$ от координаты поверхности шаровой частицы x/R, построенная на основе формулы (21) при линейном законе распределения температуры на поверхности шара, когда $\alpha = 0{,}2$ (зависимость по формуле (22)). Эта кривая достаточно хорошо аппроксимируется упрощенной зависимостью при $\alpha = 0$:

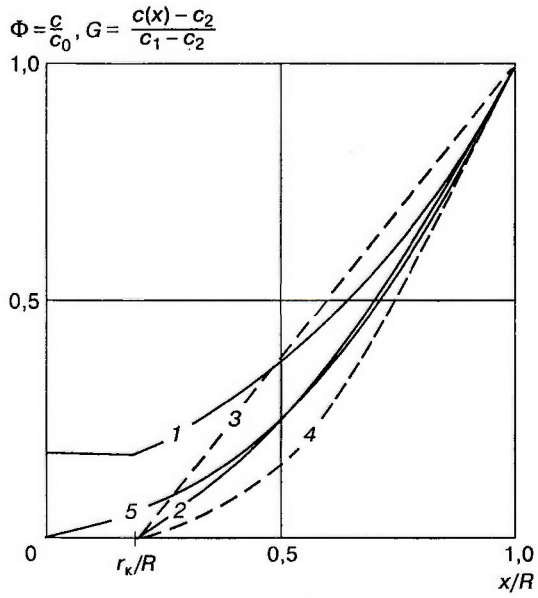

Рис. 4. Зависимость функций $\Phi = c/c_0$ (*1*) и $G = [c(x) - c_2]/(c_1 - c_2)$ от относительной координаты поверхности шара x/R.

$G = (1-\alpha)^{-n}(x/R - \alpha)^n$: *2* — при $\alpha = 0{,}2$; *3* — при $n = 1$ и $\alpha = 0{,}2$; *4* — при $n = 2$ и $\alpha = 0{,}2$; *5* — $G = (x/R)^2$.

$$\frac{c(x)-c_2}{c_1-c_2}=\left(\frac{x}{R}\right)^2, \qquad (25)$$

где параметр x/R изменяется в пределах от 0 до 1.

РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТА ДИФФУЗИИ ПАРА В СНЕГЕ

Эффект влияния дисперсности структуры снега на коэффициент диффузии пара в нем будем оценивать сравнением рассчитанного по формуле (23) потока пара $i_{ср}$ с потоком через поверхность основания цилиндрической области $i_{пл} = -\pi RD'_{сн}(c_1 - c_2)$, где $D'_{сн}$ — эффективный коэффициент диффузии пара в цилиндрической области модели снега. Тогда получим:

$$D'_{сн} = KD_м, \qquad (26)$$

где $K = 2B/R$ — параметр дисперсности структуры снега, показывающий во сколько раз возрастает коэффициент диффузии пара в снеге, по сравнению с его молекулярной диффузией в воздухе, вследствие увеличения площади испарения снежных частиц.

Для рассмотренных случаев распределения концентрации пара вблизи поверхности сферической частицы снега имеем.

При $n = 0$, т. е. при постоянстве концентрации пара: $D'_{сн} = 2D_м$.

При $n = 1$, т. е. при линейном распределении концентрации: $D'_{сн} = 1{,}57D_м$.

При $n = 2$, т. е. при квадратичном законе распределения: $D'_{сн} = 1{,}33D_м$.

При $n = 3$, т. е. при кубическом законе распределения концентрации пара: $D'_{сн} = 1{,}18D_м$.

Как уже отмечалось, линейному распределению температуры на поверхности частицы в направлении теплового потока из этих трех случаев третий соответствует наиболее близко.

В расчетной кубической ячейке имеется еще сквозное поровое пространство. При оценке общего коэффициента диффузии пара в снеге необходимо его учесть:

$$D_{сн} = D_м\frac{S_{скв}}{S_я} + D'_{сн}\frac{S_ц}{S_я}, \qquad (27)$$

где $D'_{сн}$ — коэффициент диффузии пара в цилиндрической области модели по формуле (26); $S_{скв}$, $S_ц$ и $S_я$ — площади основания сквозных пор, цилиндрической области и расчетной ячейки, соответственно.

В дальнейших расчетах кубическую ячейку заменим цилиндрической с эффективным радиусом $R_{эф} = 2R/\sqrt{\pi}$, найденным из условия равенства их объемов. При этом имеем: $S_{скв} = \pi R^2_{эф} - \pi R^2$, $S_ц = \pi R^2$ и $S_я = \pi R^2_{эф}$. Тогда $\frac{S_{скв}}{S_я} = 1 - \frac{R^2}{R^2_{эф}}$, $\frac{S_ц}{S_я} = \frac{R^2}{R^2_{эф}}$.

Параметр $R^2/R^2_{эф}$ с общей пористостью модели m связан соотношением:

$$\frac{R^2}{R^2_{эф}} = \frac{3(1-m)}{2}. \qquad (28)$$

Отсюда окончательно получим:

$$D_{сн} = D_м\,[1 + 1{,}5(K-1)\,(1-m)], \qquad (29)$$

где $0{,}33 \le m \le 1$.

При $m = 1$ имеем $D_{сн} = D_м$, а при $m = 0{,}33$ — $D_{сн} = KD_м$.

Из формулы (29) следует, что коэффициент диффузии водяного пара в снеге зависит от пористости (плотности) и характера распределения температуры на поверхности частицы снега. При линейном законе этого распределения в направлении теплового потока ($K = 1{,}33$) имеем соотношение:

$$D_{сн} = D_м\,[1 + 0{,}495(1-m)]. \qquad (30)$$

В случае слабых контактов между частицами снега основное падение температуры в ее градиентном поле будет происходить на воздушных прослойках, а по всему телу частиц из-за их несравнимо большой теплопроводности будет устанавливаться почти однородная (одинаковая) температура, т. е. имеем случай 1 при постоянной концентрации пара на поверхности шара. Тогда $K = 2$, и будет наблюдаться наибольший эффект влияния дисперсной структуры снега на его коэффициент диффузии пара:

$$D_{сн} = D_м\,[1 + 1{,}5(1-m)]. \qquad (31)$$

При постоянстве концентрации пара на поверхности частицы снега коэффициент K количественно равен отношению площадей поверхности полусферы $S_{пп}$ ($S_{пп} = 2\pi R^2$) и ее основания $S_{осн}$ ($S_{осн} = \pi R^2$). Это формально можно распространить и на другие формы частиц модели.

В выборе величины коэффициента молекулярной диффузии водяного пара $D_м$ существует много неопределенностей. С точки зрения кинетической теории газов, коэффициент диффузии однородных газов (самодиффузия) равен (в дальнейшем опустим индекс „м“):

$$D = \frac{1}{3}\bar{v}\,\bar{\lambda}, \qquad (32)$$

где $\bar{v}$ — средняя скорость движения молекул газа, $\bar{\lambda}$ — длина свободного пробега молекул газа.

В конечном итоге формула (32) при нормальном атмосферном давлении (1 атм) сводится к следующему виду:

$$D = D_0\left(\frac{T}{273}\right)^{1,5}, \qquad (33)$$

где D_0 — коэффициент диффузии пара при температуре 0 °С и $T_0 = 273$ К.

Однако к описанию экспериментальных данных в формуле (34) вместо $n = 1{,}5$ лучше подходит $n = 1{,}8$ для смеси пар—воздух.

Коэффициент взаимодиффузии паровоздушной смеси можно рассчитать по следующей формуле [*Краткий физико-химический справочник, 1960*]:

$$D_0 = c_{10}D_{10} + c_{20}D_{20}, \qquad (34)$$

где D_{10} и D_{20} — коэффициенты самодиффузии пара и воздуха.

По многочисленным литературным данным [*Кэй, Лэби, 1949; Эккерт, Дрейк, 1961; Варгафтик, 1963; Рид, Шервуд, 1964; Таблицы ..., 1976; и др.*], значения D_0 для паров воды в воздухе изменяются в пределах от 0,205 до 0,277 см^2/с, а чаще всего встречаются величины D_0 в диапазоне от 0,230 до 0,277 см^2/с.

Заслуживают особого внимания проведенные А. Юмикисом [*Jumikis, 1962*] экспериментальные исследования диффузии пара воды в промерзающих высокопористых грунтовых системах. Коэффициент диффузии пара находится по уравнению Фика из потока пара, который оценивается по количеству инея, образовавшегося при конденсации испарившегося с водной поверхности пара, на верхней (охлажденной до отрицательной температуры) поверхности установки. При этом измеренная величина D_0 составила 0,426 см^2/с. Следует отметить, что схема опыта А. Юмикиса аналогична схеме кристаллизатора для измерения коэффициента диффузии пара в снеге.

Из приведенного анализа литературных данных видно, что у исследователей нет единого мнения на счет величины коэффициента диффузии водяного пара. Однако ясно, что она явно больше, чем коэффициент диффузии воздуха. В дальнейших расчетах для водяного пара можно использовать величину D_0, по А. Юмикису, так как она получена непосредственно экспериментальным путем в условиях, близких к условиям измерения коэффициента диффузии пара в снеге методом кристаллизатора. Расчеты коэффициента диффузии пара в снеге по формулам (30) и (31) при двух различных законах распределения температуры на поверхности частицы снега в пределах увеличения его плотности от 0,1 до 0,5 г/см^3 ($m = 0{,}46...0{,}89$) дали следующие диапазоны изменений значений $D_{сн}$ (см^2/с):

1. Линейное распределение температуры — 0,45...0,52.

2. Постоянная температура — 0,50...0,77.

Таким образом, наиболее вероятные значения коэффициента диффузии пара в снегу находятся в пределах 0,45...0,77 см^2/с и вполне нормально вписываются в область экспериментальных данных большинства упомянутых исследователей. На величину коэффициента диффузии пара в снегу из двух факторов — плотности и структуры — более сильное влияние оказывает структура снега (характер контактирования частиц). В модели температурная зависимость коэффициента диффузии пара в снегу может проявиться через коэффициент молекулярной диффузии пара $D_м$.

Литература

Андерсон Д., Бенсон К. Уплотнение и диагенез снега // Лед и снег. М., Мир, 1966, с. 345—370.

Варгафтик Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М., Физматгиз, 1963, 708 с.

Войтковский К.Ф. Механические свойства снега. М., Наука, 1977, 126 с.

Гаврильев Р.И. Теплофизические свойства горных пород и напочвенных покровов криолитозоны. Новосибирск, Изд-во СО РАН, 1998, 280 с.

Де Кервен М.Р. О метаморфизме снега // Лед и снег. М., Мир, 1966, с. 324—345.

Дюнин А.К. Испарение снега. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1961, 119 с.

Каганер М.Г. Контактный теплообмен в вакуумированном зернистом материале // ИФЖ, 1966, т. II, № 1, с. 30—37.

Коломыц Э.Г. Структура и режим снежной толщи Западно-Сибирской тайги. Л., Наука, 1971, 174 с.

Краткий физико-химический справочник. Т. I / Под общ. ред. К.П. Яковлева. М., Физматгиз, 1960, 446 с.

Куваева Г.М. К вопросу определения величины коэффициентов диффузии водяного пара в снегу // Материалы Третьей закавказской науч. конф. по изучению снежного покрова, снежных лавин и горных ледников Кавказа. Тр. Закавказ. науч.-исслед. гидрометеоролог. ин-та. Вып. 20. Л., Гидрометеоиздат, 1966, с. 75—79.

Курс метеорологии (физика атмосферы) / Под ред. П.Н. Тверского. Л., Гидрометеоиздат, 1951, 888 с.

Кэй Д., Лэби Т. Справочник физика-экспериментатора. М., Изд-во иностр. лит-ры, 1949, 299 с.

Лыков А.В. Тепломассообмен: Справочник. М., Энергия, 1972, 560 с.

Морозов Г.А. Расчет изменения плотности снежного покрова под действием диффузии, конвекции, возгонки и сублимации водяного пара в нем // Метеорология и гидрология, 1967, № 6, с. 98—104.

Павлов А.В. Теплофизические свойства и тепловой баланс снежного покрова в Подмосковье // Материалы к учению о мерзлых зонах земной коры. М., Изд-во АН СССР, 1962, с. 3—35.

Рид Р., Шервуд Т. Свойства газов и жидкостей (определение и корреляция). М., Гостоптехиздат, 1964, 334 с.

Савельев Б.А., Лаптев М.П., Лаптева Н.И. Строение, состав, физико-механические свойства снега в Хибинах и их изменения в процессе метаморфизма // Снег и лавины Хибин. М., Изд-во МГУ, 1967, с. 201—239.

Таблицы физических величин: Справочник / Под ред. акад. И.К. Кикоина. М., Атомиздат, 1976, 1008 с.

Федосеева В.И., Федосеев Н.Ф. Оценка коэффициента диффузии водяного пара в снежном покрове // Метеорология и гидрология, 1988, № 2, с. 132—136.

Эккерт Э.Р., Дрейк Р.М. Теория тепло- и массообмена. М.; Л., Госэнергоиздат, 1961, 680 с.

Gavrilyev R.I. A mathematical model for calculating thermal conductivity of snow subject to metamorphism // Proc. of the

5th Intern. Symp. on Thermal Engin. and Sci. for Cold Regions (May 19—22, 1996, Ottawa, Canada). Printing of Proc. Supported by National Research Council Canada, 1996, p. 516—521.

Jumikis A. Vapor Diffusion in Freezing Soil Systems of Very Large Porosities // Highway Research Board Bulletin, 1962, No. 331, p. 28—45.

Woodside W. Calculation of the thermal conductivity of porous media // Canadian Journal of physics, 1958, vol. 36, No. 7, p. 112—118.

Yosida Z. Heat transfer by water vapoir in snow cover. Teion Kagaki // Inst. of Low Temperat. Sci., 1950, No. 5, p. 93—100.

Поступила в редакцию
25 декабря 2003 г.