Криосфера Земли, 2015, т. XIX, № 2, с. 26–34 **http://www.izdatgeo.ru**

УДК 551.343

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МОРФОЛОГИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ ОЗЕРНО-ТЕРМОКАРСТОВЫХ РАВНИН В ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ КЛИМАТИЧЕСКИХ УСЛОВИЯХ

А.С. Викторов, В.Н. Капралова, О.Н. Трапезникова

Институт геоэкологии имени Е.М. Сергеева РАН,
101000, Москва, Уланский пер., 13, стр. 2, Россия; dist@geoenv.ru

Целью работы является теоретическое и эмпирическое обоснование новой модели развития морфологической структуры озерно-термокарстовых равнин, учитывающей изменение климатических условий. В основу модели положены подходы математической морфологии ландшафта, базирующиеся на использовании теории случайных процессов. В результате исследований получена модель морфологической структуры озерно-термокарстовых равнин при климатических изменениях в однородных условиях для случая изометричных озер. Аналитически показано, что и при климатических изменениях для разных физико-географических и геокриологических условий распределение площадей термокарстовых озер в каждый момент времени должно соответствовать логнормальному распределению, а расположение – пуассоновскому. Выводы согласуются с результатами эмпирических исследований на участках, расположенных в разных физико-географических, геокриологических и геологических условиях.

Морфологическая структура, озерно-термокарстовые равнины, математическая морфология ландшафта, математическая модель

MATHEMATICAL MODEL OF THE LACUSTRINE-THERMOKARST PLAIN MORPHOSTRUCTURE UNDER THE CHANGING CLIMATIC CONDITIONS

A.S. Victorov, V.N. Kapralova, O.N. Trapeznikova

Sergeev Institute of Environmental Geoscience, RAS,
101000, Moscow, Ulansky per., 13, build. 2, Russia; dist@geoenv.ru

The aim of the paper is theoretical and empirical substantiation for a new model of developing the morphological pattern for thermokarst lacustrine plains taking into account the climatic changes. The model is based on the approach of the mathematical morphology of landscape, using the random process theory. The researches have resulted in the mathematical model for the morphological pattern of uniform thermokarst lake plains changing under climatic changes in case of isometric lakes. It has been demonstrated analytically that under the climatic changes the distribution of thermokarst lake areas should obey the lognormal distribution at any time, and their spatial distribution should obey the Poisson distribution for the different physiography and permafrost conditions. These conclusions agree with empirical testing of key areas with different physiography, geology and permafrost conditions.

Morphological pattern, thermokarst lake plain, mathematical morphology of landscape, mathematical model

ВВЕДЕНИЕ

Озерно-термокарстовые равнины являются типичным ландшафтом многих территорий Западной и Восточной Сибири, севера Канады, Аляски. Морфологическая структура этих ландшафтов достаточно полно исследована. При этом изучены как количественные морфометрические аспекты, так и динамика ландшафта озерно-термокарстовых равнин. Получены интересные данные по заозеренности территорий, плотности расположения озер и их размерам [*Ласточкин, 1969; Кирпотин и др., 2008; Днепровская и др., 2009; Кравцова, Быстрова, 2009; Burn, Smith, 1990; Fitzgerald, Riordan, 2003; Smith et al., 2005*]. В то же время основные исследования были направлены на изучение различий соответствующих измеряемых параметров на разных участках и их связи с геологическими, геокриологическими и климатическими факторами. Лишь отдельные работы освещали вопрос о возможности существования некоторых однотипных закономерностей, справедливых для широкого спектра природных условий, и создание соответствующих моделей [*Викторов, 1995, 2006; Капралова, Викторов, 2009; Полищук, 2013; Капралова, 2014*]. Однако и в этих моделях рассматривалась ситуация со стабильными климатическими условиями. Между тем модель динамики такого ансамбля термокарстовых очагов является существенным элементом всей картины развития термокарстовых процессов. В практическом отношении такая модель важна для решения

© А.С. Викторов, В.Н. Капралова, О.Н. Трапезникова, 2015

следующих задач: 1) оценки риска поражения линейных сооружений термокарстовыми процессами; 2) прогнозирования динамики территории под воздействием озерного термокарста; 3) предварительной количественной оценки инженерно-геокриологических условий по трассе сооружения.

ОГРАНИЧЕНИЯ И ДОПУЩЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МОРФОЛОГИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ ОЗЕРНО-ТЕРМОКАРСТОВЫХ РАВНИН

Целью настоящей работы является теоретическое и эмпирическое обоснование новой модели развития морфологической структуры озерно-термокарстовых равнин, учитывающей изменение климатических условий.

В основу модели положен подход математической морфологии ландшафта [*Викторов, 1998, 2006; Капралова, 2014*]. Данный подход базируется на изучении ландшафтного рисунка, образованного на земной поверхности природно-территориальными комплексами. В методе математической морфологии ландшафта широко используется теория случайных процессов.

Модель построена для участков с однородными физико-географическими и геокриологическими условиями. Под однородностью мы подразумеваем сочетание следующих особенностей: 1) однотипность рельефа поверхности, проявляющаяся в однотипности изображений материалов космических съемок; 2) постоянный вещественный состав отложений, слагающих поверхность, и подстилающих отложений; 3) сохраняющаяся на протяжении всего участка мощность поверхностных отложений; 4) отсутствие погребенных ложбин; 5) отсутствие тектонических нарушений; 6) расположение всего участка в пределах одной тектонической структуры; 7) относительно однородные геокриологические условия. Естественно, в модели не предполагается абсолютная однородность, а лишь статистическая однородность, допускающая случайные колебания.

Исследуемый тип территорий представляет собой слабоволнистую субгоризонтальную поверхность с преобладанием различной тундровой растительности (пушицевые тундры, осоково-пушицевые и др.), в которую вкраплены озера без развития эрозионной сети. Озера имеют изометричную, часто округлую форму и беспорядочно разбросаны по равнине. Типичный характер такой равнины представлен на рис. 1. Такой тип территории отмечен в районах Западной и Восточной Сибири, Дальнего Востока и севера Восточно-Европейской равнины (например, озерно-термокарстовые равнины распространены на не менее чем 30 % криолитозоны Западной Сибири).

Таким образом, модель не является общей и не охватывает значительный ряд случаев развития термокарстовых озер, например, случай расположения озер по полигональной сети, продиктованной повторно-жильными льдами. В подобных случаях морфологическая структура территории имеет иной характер, в частности, озера в отличие от беспорядочного расположения часто тяготеют к сетям линий (ортогональных или иных).

При разработке модели мы придерживаемся следующих представлений о развитии термокарстового озера, использованных в ряде геокриологических исследований (например, [*Перльштейн и др., 2005*]). Согласно им, в начальном развитии озера можно условно выделить две неравноценные стадии. На первой стадии оно представляет собой понижение, где скопилось некоторое количество воды, и очертания озера определяются первичным рельефом, при этом столб воды больше критического значения. В этой ситуации в понижении начинаются термокарстовые процессы. Такое озеро может быть названо термокарстовым лишь условно, так как название, согласно геоморфологическим канонам, дается по морфологии котловины, которая еще не испытала влияния термоабразии.

На второй стадии озеро уже имеет морфологические особенности термокарстового озера – в рассматриваемых нами однородных условиях это круговые или округлые очертания [*Методическое руководство..., 1978*]. Наконец, далее могут наступать стадии слияний озер и затухания термоабразионных процессов.

Первая стадия достаточно короткая. Модель относится преимущественно ко второй стадии, которая по длительности является ведущей, здесь уже отмечаются основные характерные черты

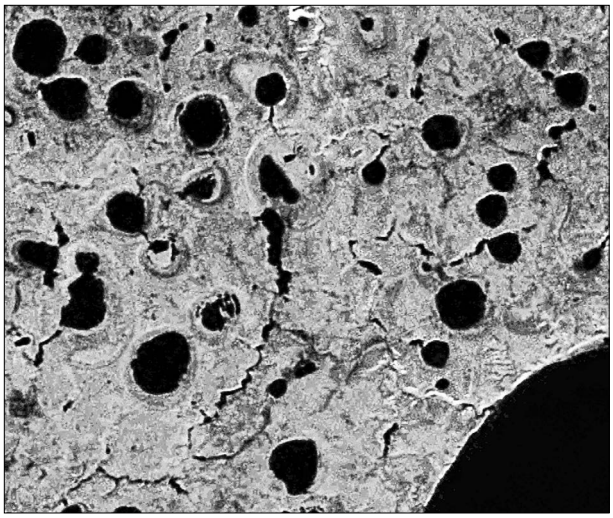

Рис. 1. Типичное изображение озерно-термокарстовой равнины (п-ов Ямал) на материалах космической съемки (Landsat от 08.08.1999).

морфологии. В основу модели положены следующие предположения:

– процесс появления термокарстовых понижений вероятностный и на непересекающихся площадках идет независимо, при этом вероятность возникновения понижений на пробной площадке зависит только от ее площади (Δs). Для малых площадок вероятность возникновения одного понижения (p_1) много больше, чем вероятность возникновения нескольких понижений (p_k):

$$p_1 = \gamma\Delta s + o(\Delta s),$$

$$p_k = o(\Delta s),\ k = 2, 3, ...,$$

где γ – среднее число понижений на единицу площади;

– рост размеров озер благодаря термоабразионному воздействию происходит независимо, и он прямо пропорционален запасам тепла в озере и обратно пропорционален площади боковой поверхности озерной котловины.

Таким образом, будем рассматривать вариант синхронного старта, когда процесс появления первичных озер относительно короткий по сравнению с периодом их развития, и в дальнейшем число понижений остается постоянным. Озеро в этой схематизации рассматривается как объект цилиндрической формы.

Первое предположение представляется естественным, так как вытекает из однородности рассматриваемой территории и отражает то, что на любой ограниченной площадке наблюдается лишь конечное число термокарстовых понижений (точнее – их центров).

Второе предположение также представляется справедливым. Оно сводится к пропорциональности роста размера термокарстового очага (озера) средней плотности теплового потока через боковую поверхность.

Такие предположения являются упрощенными, не отражая все разнообразие природных взаимосвязей; однако гибкий характер предположений, базирующийся на вероятностном подходе, придает им определенный “запас прочности”.

Важно, что в модели не предполагается постоянства во времени климатических характеристик, а допускается изменение климатических условий.

Анализ математической модели морфологической структуры озерно-термокарстовых равнин

Модель позволяет аналитическим путем определить закономерности строения термокарстовой равнины. Как можно показать [*Карлин, 1971*], из допущений, положенных в основу модели, вытекает, что распределение числа (k) термокарстовых понижений (центров) на случайно выбранной площадке подчиняется закону Пуассона [*Викторов, 1995, 2006*]:

$$P(k,s) = \frac{(\gamma s)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\gamma s},$$

где γ – среднее число понижений на единицу площади; s – площадь пробной площадки.

Рассмотрим изменение размеров термокарстовых понижений. Разобьем весь временной отрезок t на n интервалов длиной t_i, $i = 1, ..., n$, на которых климатические условия можно считать приблизительно постоянными. Рассмотрим i-й интервал $\left(\sum_{k=1}^{i-1} t_k, \sum_{k=1}^{i} t_k\right)$. Проанализируем динамику размеров одного понижения термокарстового генезиса в пределах i-го интервала времени.

Второе положение, лежащее в основе модели, обусловливает пропорциональность случайного, вообще говоря, изменения диаметра понижений за j-й год из рассматриваемого временного интервала уже существующему диаметру. Действительно, если V – объем воды в озерной котловине, который является комплексным результатом концентрации воды с водосбора, испарения, стока и других процессов формирования водного баланса, то глубина озера составит

$$h = \frac{V}{\pi u_j^2},$$

где u_j – радиус озера к началу j-го года, а площадь боковой поверхности, залитой водой,

$$S = \frac{2V}{u_j}. \qquad (1)$$

Соответственно, из второго предположения (с коэффициентом пропорциональности α) вытекает выражение

$$\Delta u_j = \frac{\alpha c V}{S}\xi_j^0,$$

где Δu_j – приращение размеров за j-й год; c – удельная теплоемкость; ξ_j^0 – случайная величина, учитывающая воздействие эпизодических факторов (количество осадков за год, режим выпадения и др.), которая после подстановки площади из выражения (1) и упрощения приобретает вид

$$\Delta u_j = 2\alpha c u_j \xi_j^0.$$

Отсюда после упрощения вытекает

$$\Delta u_j = \xi_j u_j,\quad \sum_{k=1}^{i-1} t_k \le j \le \sum_{k=1}^{i} t_k,\quad \xi_j = 2\alpha c \xi_j^0. \qquad (2)$$

Коэффициенты пропорциональности ξ_j представляет собой случайную величину, учитывающую ход процесса деградации за конкретный временной интервал. Она зависит от летних и зимних

температур, мощности снежного покрова, объема ливневого стока, температуры почвы, характера выпадения осадков и их количества и др. Эти коэффициенты для разных лет независимы, но одинаково распределены в пределах рассматриваемого i-го интервала времени. Обозначим их математическое ожидание и дисперсию следующим образом:

$$M\xi_j = a_i, \quad D\xi_j = \sigma_i^2.$$

Перенося переменные, описывающие размер понижений в левую часть выражения (2) и суммируя, получаем

$$\sum_{j=s}^{r} \frac{\Delta u_j}{u_j} = \sum_{j=s}^{r} \xi_j.$$

После замены левой суммы интегралом окончательно имеем

$$\int_{x(s)}^{x(r)} \frac{du}{u} = \sum_{j=s}^{r} \xi_j, \quad \sum_{k=1}^{i-1} t_k \le s < r \le \sum_{k=1}^{i} t_k,$$

где $x(r)$, $x(s)$ – размер понижения соответственно в момент времени r и s в рассматриваемом интервале.

После интегрирования получаем

$$\ln x(r) - \ln x(s) = \sum_{i=s}^{r} \xi_i.$$

Поскольку сумма большего числа независимых слагаемых по центральной теореме (например, [*Королюк, 1985*]) распределена нормально, отсюда следует, что процесс роста радиусов термокарстовых форм можно при значительном $(r - s)$ приближенно рассматривать как марковский случайный процесс с непрерывным временем с переходной функцией

$$f(v,x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i x\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{\left(\ln(x/v) - a_i t\right)^2}{2\sigma_i^2 t}\right], \quad (3)$$

где a_i, σ_i – параметры распределения на рассматриваемом временном интервале; v – начальный размер термокарстового понижения; x – размер понижения через время t (в i-м временном интервале).

Иначе говоря, если радиус термокарстового понижения к началу анализируемого временного отрезка равен ζ_{i-1}, то справедливо выражение

$$\zeta_i = \zeta_{i-1}\eta_i, \quad (4)$$

где η_i – случайная величина, равная отношению радиуса (ζ_i) термокарстовой формы в конце временного отрезка к радиусу (ζ_{i-1}) в начале рассматриваемого (i-го) отрезка. Эта величина, как следует из выражения (4), имеет логнормальное распределение с параметрами

$$M[\ln\eta_i] = a_i t_i, \quad D[\ln\eta_i] = \sigma_i^2 t_i, \quad i = 1, ..., n-1. \quad (5)$$

Условно принимая начальный размер термокарстовой формы за единицу, из (4) нетрудно получить соотношение

$$\ln\zeta(t) = \ln\eta_1 + \ln\eta_2 + ... + \ln\eta_{n-1} + \ln\eta_n,$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} t_i \le t \le \sum_{i=1}^{n} t_i,$$

где $\zeta(t)$ – размер термокарстовой формы в момент t; η_i ($i = 1, ..., n-1$) – логнормально распределенные независимые случайные величины с указанными в (5) параметрами; η_n – логнормально распределенная независимая случайная величина с параметрами

$$M[\ln\eta_n] = a_n\left(t - \sum_{i=1}^{n-1} t_i)\right),$$

$$D[\ln\eta_n] = \sigma_n^2\left(t - \sum_{i=1}^{n-1} t_i\right).$$

Отсюда, учитывая суммирование независимых нормально распределенных величин, следует, что логарифм размера термокарстовой формы в конце временного отрезка $(0, t)$ представляет собой нормально распределенную случайную величину с математическим ожиданием

$$M[\ln\zeta(t)] = \sum_{k=1}^{n-1} a_k t_k + a_n\left(t - \sum_{k=1}^{n-1} t_k\right)$$

и дисперсией

$$D[\ln\zeta(t)] = \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k^2 t_k + \sigma_n^2\left(t - \sum_{k=1}^{n-1} t_k\right).$$

Таким образом, даже в условиях климатического изменения распределение радиусов, а значит, и площадей, термокарстовых форм подчиняется логнормальному закону, но не с линейным, а с кусочно-линейным ростом параметров.

Отсюда следует, что для любого момента времени получим логнормальное распределение диаметра термокарстовых форм:

$$F_d(x,t) = \Phi\left(\frac{\ln x - at}{\sigma\sqrt{t}}\right),$$

или для плотности распределения

$$f_d(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{(\ln x - at)^2}{2\sigma^2 t}\right],$$

где $F_d(x, t)$ – распределение диаметра; $\Phi(t)$ – функция Лапласа; a, σ – параметры распределения; t – время, прошедшее с начала процесса.

Нетрудно показать, что при плавном изменении климатических параметров ($a(t)$, $\sigma(t)$) вывод

сохраняется, но несколько меняются выражения для матожидания и дисперсии:

$$M[\ln\zeta(t)] = \int_0^t a(u)du, \quad D[\ln\zeta(t)] = \int_0^t \sigma^2(u)du.$$

Для приведенных построений не является существенной именно круговая в плане форма озер, если предположить, что в процессе роста сохраняется геометрическое подобие очертаний. В этом случае озеро выступает как цилиндр, но не с круговой направляющей, а с направляющей произвольной формы.

Конечно, нельзя считать, что модель охватывает все возможные случаи. Так, на территории Якутии мы сталкиваемся с весьма отличной морфологией: не изометричной, а фестончатой формой озер. Этот случай требует специальной проверки и анализа.

Представляется также важным вопрос, насколько влияет на предлагаемую модель степень активности хода термоабразионных процессов. Иначе говоря, что произойдет, если в какой-то период времени активность процессов резко уменьшилась и рост плановых очертаний озер рассматриваемого участка временно остановлен? Близка к описанной выше и ситуация, когда в силу климатических изменений рост площадей озер практически приостановлен, а затем при наступлении условий, благоприятных для термоабразии, вновь продолжен.

Для ответа на поставленные вопросы может быть использована описанная модель. Рассмотрим ситуацию с возобновлением развития после остановки. Выделим временной интервал остановки как t_i. В силу остановки для этого интервала справедливы соотношения:

$$a_i = 0, \ \sigma_i^2 = 0,$$

и, соответственно, мы имеем просто частный случай модели, а именно, для данного i

$$\zeta_i = \zeta_{i-1}.$$

Следовательно, ситуация аналогична той, когда просто сдвинуты номера интервалов, больших i, на единицу. Значит, и после рассматриваемого временного интервала сохраняется логнормальность.

Отдельного анализа заслуживает тот факт, что водное зеркало у озер способно неожиданно сокращаться в размерах. Это происходит независимо даже у рядом расположенных озер, поэтому наиболее вероятной причиной является исчезновение и последующее восстановление ледяных пробок в грунтовых каналах [*Makarycheva et al., 2014*]. В этих случаях водное зеркало перестает достигать борта термокарстового понижения, и процесс термоабразии борта приостанавливается. В других случаях причиной выступает колебание количества осадков, очевидно, в такие моменты рост озера прекращается.

Анализ показывает, что вышеописанная ситуация в малом временном интервале аналогична рассмотренной ситуации с приостановкой роста озер. Перерыв в росте озера не оказывает влияния на логнормальный характер распределения. Такой перерыв можно считать особенностью распределения коэффициентов пропорциональности ξ_j в выражении (2): коэффициенты могут с некоторой ненулевой вероятностью принимать значение нуль. Поскольку мы не накладывали ограничений на распределение этих коэффициентов, а их независимость сохраняется, это означает, что весь ход анализа остается справедливым.

Эмпирическое тестирование результатов анализа

Полученный теоретический вывод о том, что в любой момент времени должна сохраняться логнормальность распределений размеров, а значит, и площадей термокарстовых озер, был прове-

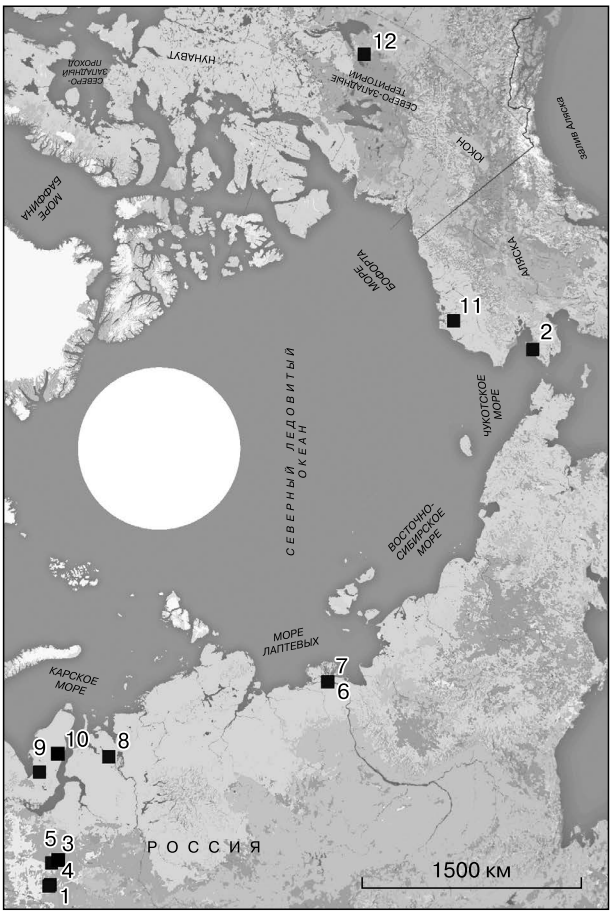

Рис. 2. Схема расположения участков:

1 – Валоктаягун-1; 2 – Аляска-1; 3 – Пякупур; 4 – Валоктаягун-2; 5 – Вынгапур; 6 – Лена-1; 7 – Лена-2; 8 – Гыданский; 9 – Ямал-1; 10 – Ямал-2; 11 – Аляска-2; 12 – Канада.

рен на ряде участков криолитозоны, расположенных в различных физико-географических, геокриологических и геологических условиях (рис. 2). Они находятся на территории Западной и Восточной Сибири, Аляски, Канады. Краткая характеристика участков приведена в табл. 1. Проверка осуществлялась путем оцифровки озер по материалам космической съемки и сопоставления полученных выборок (площади) с теоретическим логнормальным распределением с использованием критерия Пирсона согласно известной методике [*Крамер, 1970*]. Расчет производился в программе “Статистика” на уровнях значимости 0,95 и 0,99. Параметры распределения – средний логарифм и стандарт логарифма – оценивались по выборке. Вычисленное значение критерия сравнивалось с критическим; критическое значение критерия определяется числом степеней свободы, зависящим от разности количества интервалов, на которое разбивает программа выборку при проверке, и числом свободных параметров, оцениваемых по выборке и от определенного уровня доверительной вероятности (0,95 или 0,99).

На части участков термокарстовые озера имели простую круговую форму. Анализ результатов показывает, что в подавляющем большинстве слу-

Таблица 1. **Характеристика тестовых участков**

Название	Район и характеристика участков	Среднегод. температура воздуха/пород, °С	Мощность ММП, м	Среднегод. кол-во осадков, мм
Валоктаягун-1 Валоктаягун-2	**Среднеобская низменность, в районе р. Валоктаягун.** Плоская водораздельная поверхность сложена флювиогляциальными песчаными породами (льдистость до 40 %), перекрытыми торфом (льдонасыщенность до 90 %). Редкоостровное распространение многолетнемерзлых пород (ММП). Районы, в пределах которых существуют ММП с поверхности, имеют двухслойный разрез мерзлых толщ. Мощность верхнего слоя до 5 м, реликтовые мерзлые толщи залегают на глубине более 100 м	–4,4/–0,1	до 5	600
Аляска-1	**Аляска, дельта р. Серпентин, п-ов Сьюард.** Аллювиально-аккумулятивная поверхность сложена с поверхности пылеватыми супесями и песками (мощность до 3–8 м), подстилаемыми песчано-гравийной толщей, отложения оторфованы. Прерывистое распространение ММП	–6/–3	5–60	370–450
Пякупур Вынгапур	**Среднеобская низменность, р. Пякупур, р. Вынгапур.** Плоская водораздельная поверхность сложена озерно-аллювиальными разнозернистыми песками, перекрытыми биогенными отложениями. Прерывистое распространение ММП	–7/–2	50	410–460
Лена-1 Лена-2	**Район дельты р. Лена, пос. Чай-Тумус.** Третья надпойменная терраса сложена льдистыми толщами супесей и суглинков, включающих многочисленные и протяженные по вертикали тела повторно-жильного льда (ледовый комплекс). Сплошное распространение ММП, льдистость 50–60 %	–13/–11	500–700	200–250
Гыданский	**Гыданский полуостров.** Прибрежно-морская равнина сложена флювиогляциальными слоистыми песками, мелкозернистыми пылеватыми. Сплошное распространение ММП. Характерно очень широкое распространение эпикриогенных ММП, синкриогенные породы мощностью более 10 м отмечены в разрезах лагунно-морских террас, пойм и лайд	–11/–9	300–400	350
Ямал-1	**Полуостров Ямал, р. Турмаяха.** Третья лагунно-морская терраса сложена песками мелкозернистыми пылеватыми с редкими прослоями суглинков. Сплошное распространение ММП. Мерзлые породы характеризуются практически сплошным распространением с поверхности и монолитным залеганием по вертикали, талые породы встречаются под руслами крупных рек и озер	–9/–6	200–280	400
Ямал-2	**Полуостров Ямал, пос. Усть-Юрибей.** Третья морская терраса, плоская, заболоченная, сложена песчаными или песчано-суглинистыми отложениями. Сплошное распространение ММП. Многолетнемерзлые породы характеризуются практически сплошным распространением с поверхности и монолитным сложением по вертикали, талики возможны под руслами многоводных рек и крупных озер	–8/–3	150–250	300–400
Аляска-2	**Аляска, долина р. Мид.** Плоская равнина сложена оторфованным суглинком и однородными мелкозернистыми песками высокой льдистости флювиогляциального генезиса. Сплошное распространение ММП	–12/–6,5	200–300	175
Канада	**Канада, Большое Невольничье озеро.** Низменная равнина сложена морскими глинами, широко распространены бугристые и грядовые болота с торфяной толщей мощностью до 3 м. Прерывистое распространение ММП, льдистость 10 %	–5/–2	до 30	340

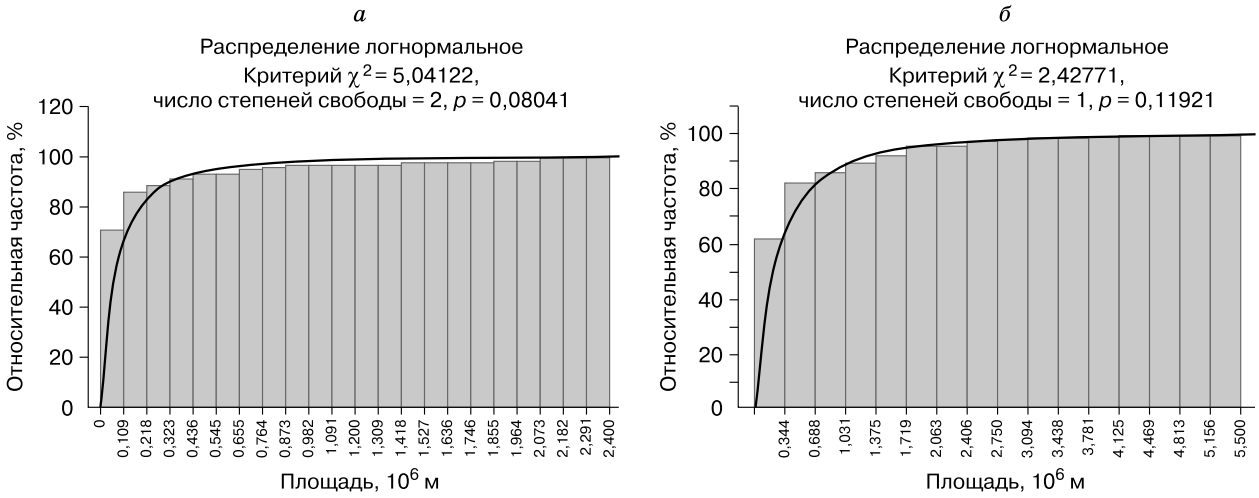

Рис. 3. Пример соответствия теоретического логнормального (линия) и эмпирического (гистограмма) распределений площади термокарстовых озер:

а – для участка Лена-2 (Восточная Сибирь); *б* – для участка Вынгапур (Западная Сибирь).

чаев гипотеза о логнормальности не отвергается (рис. 3, табл. 2).

Гораздо чаще встречаются территории, где помимо округлых озер присутствуют озера сложной формы. Пять участков, на которых проводились исследования, расположены на Западно-Сибирской равнине, в районе рек Пякупур, Валоктаягун и Вынгапур. На участках было оцифровано от 78 до 214 озер.

Исследование на участках показало хорошее соответствие теоретических и экспериментальных данных – с доверительной вероятностью 0,99 гипотеза не отвергается на всех участках. Исследования также показали, что межгодовые колебания условий развития озер не оказывают существенного влияния на соответствие логнормальному распределению. Так, были исследованы снимки трех сроков съемки на участках Валоктаягун-1, Валоктаягун-2 и Вынгапур, четырех – на участке Пякупур. Во всех случаях выборки согласуются с логнормальным распределением, фрагмент данных приведен в табл. 3.

Аналогично осуществлялась проверка вывода о пуассоновском распределении числа озер на случайно выбранной площадке. Для этого в программе “Векторизатор” выделялась область с оцифрованными озерами и с помощью специального программного модуля производился подсчет количества центров озер, попадающих на случайно выбранную (с помощью датчика случайных чисел) площадку (в данном случае – круга) постоянного размера. На каждом участке проводилось несколько серий испытаний с изменением размера площадки от серии к серии. Анализ результатов также показывает, что в подавляющем большинстве случаев на уровне значимости 0,99 (63 из 66 выборок) гипотеза о пуассоновском распределении не отвергается (рис. 4).

Срок съемки также не играет роли – фрагмент данных приведен в табл. 4.

Таблица 2. **Сравнение эмпирических и теоретических распределений площади термокарстовых озер по критерию Пирсона (χ^2) для участков с преобладанием округлой формы озер**

Участок	Критерий χ^2	Критерий χ^2 на уровне значимости 0,95 (0,99)	ln *s*	*D*
Лена-1	29,09	28,87 **(34,80)**	4,39	1,25
Лена-2	11,10	**12,59 (16,81)**	4,25	1,24
Гыданский	7,93	**11,07 (15,09)**	4,35	1,24
Канада	2,20	**5,99 (9,21)**	5,51	2,02

Таблица 3. **Сравнение эмпирических и теоретических распределений площади термокарстовых озер по критерию Пирсона (χ^2) с учетом разного срока съемки (фрагмент)**

Участок	Год съемки	Критерий χ^2	Критерий χ^2 на уровне значимости 0,95 (0,99)	ln *s*	*D*
Пякупур	1973	19,16	18,31 **(23,21)**	4,36	1,80
Пякупур	1987	19,13	16,92 **(21,67)**	4,34	1,80
Пякупур	2001	24,23	21,03 **(26,22)**	4,37	1,87
Пякупур	2007	18,29	15,51 **(20,09)**	4,33	1,65

Примечание к табл. 2, 3. ln *s* – средний логарифм площади озера; *D* – дисперсия логарифма площади. Жирным шрифтом выделены значения, демонстрирующие согласие с гипотезой на уровне значимости 0,95 и 0,99.

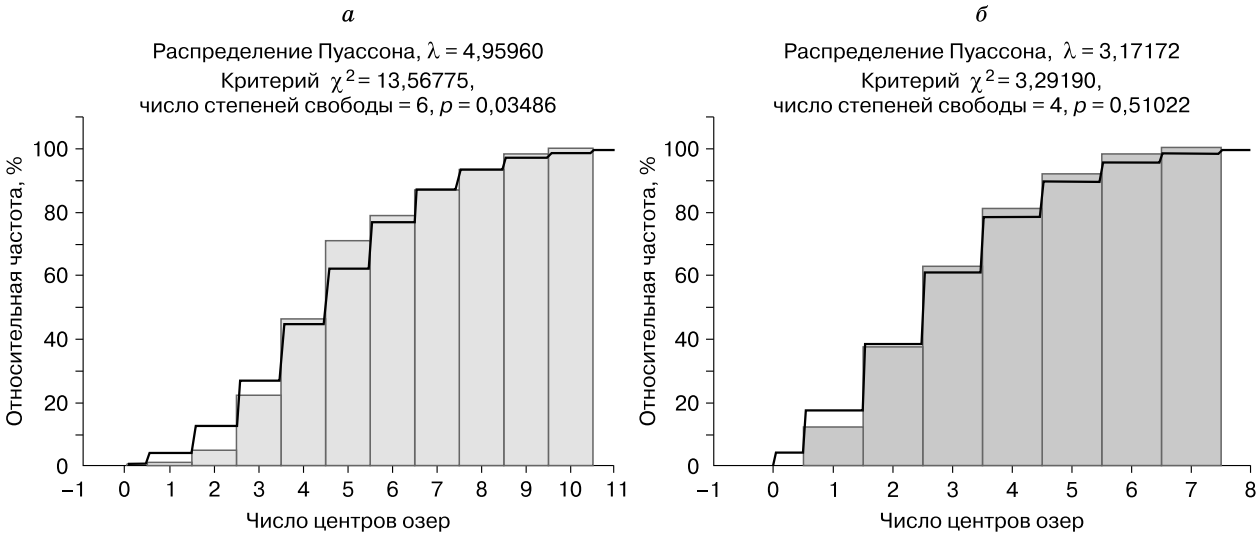

Рис. 4. Пример соответствия теоретического распределения Пуассона (линия) и эмпирического распределения (гистограмма) числа центров термокарстовых озер на случайно выбранной площадке:

а – для участка Лена-1 (Восточная Сибирь); *б* – для участка Валоктаягун-1 (Западная Сибирь).

Таблица 4. **Значение критерия согласия эмпирических и теоретических распределений центров термокарстовых озер (фрагмент)**

Имя файла	Размер круга, пиксел	Сред. число озер на площадке	Критерий Пирсона χ^2	Критерий χ^2 на уровне значимости 0,95 (0,99)
Участок Валоктаягун-1 (1988)	52	3,76	10,74	**11,07 (15,09)**
	45	2,72	6,25	**11,07 (15,09)**
	42	2,61	6,78	**9,49 (13,28)**
	38	2,17	6,34	**9,49 (13,28)**
	35	1,89	2,36	**7,82 (11,34)**
	26	0,84	7,10	5,99 **(9,21)**
	19	0,48	2,86	**3,84 (6,64)**
Участок Валоктаягун-1 (2001)	87	2,61	9,92	9,49 **(13,28)**
	92	3,00	4,21	**9,49 (13,28)**
	89	2,25	11,64	9,49 **(13,28)**
	76	1,77	5,00	**7,82 (11,34)**
	67	1,28	5,34	**5,99 (9,21)**
	56	1,13	4,19	**5,99 (9,21)**
	48	0,80	0,38	**3,84 (6,64)**
	41	0,51	0,25	**3,84 (6,64)**
Участок Валоктаягун-1 (2005)	300	4,97	12,63	**12,59 (16,81)**
	286	4,52	1,59	**12,59 (16,81)**
	250	3,58	6,92	**11,07 (15,09)**
	214	2,45	4,41	**9,49 (13,28)**
	206	1,90	2,96	**7,82 (11,34)**
	175	1,69	4,73	**7,82 (11,34)**
	136	0,95	4,04	**5,99 (9,21)**
	119	0,87	4,12	**5,99 (9,21)**
	102	0,64	0,79	**3,84 (6,64)**
	87	0,54	1,65	**3,84 (6,64)**

Примечание. Жирным шрифтом выделены значения, демонстрирующие согласие с гипотезой на уровне значимости 0,95 и 0,99.

Таким образом, выполненная проверка показывает хорошее согласие реальных наблюдений распределения площадей озер и числа озер на случайной площадке теоретическим, вытекающим из анализа модели.

ВЫВОДЫ

1. Получена модель изменения морфологической структуры озерно-термокарстовых равнин при климатических изменениях в однородных условиях для случая изометричных озер.

2. Аналитически показано, что и в условиях климатических изменений распределение площадей термокарстовых озер в каждый момент времени должно соответствовать логнормальному распределению, а расположение термокарстовых озер – пуассоновскому.

3. Аналитически показано, что логнормальный характер распределения площадей термокарстовых озер и пуассоновский характер распределения плотности расположения озер сохраняются для разных физико-географических и геокриологических условий.

4. Материалы эмпирических исследований на участках, расположенных в разных физико-географических, геокриологических и геологических условиях, более чем в 95 % согласуются с теоретическими построениями.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (№ 14-17-00357).

Литература

Викторов А.С. Математическая модель термокарстовых озерных равнин как одна из основ интерпретации материалов космических съемок // Исслед. Земли из космоса, 1995, № 5, с. 42–50.

Викторов А.С. Математическая морфология ландшафта / А.С. Викторов. М., Тратек, 1998, 191 с.

Викторов А.С. Основные проблемы математической морфологии ландшафта / А.С. Викторов. М., Наука, 2006, 252 с.

Днепровская В.П., Брыксина Н.А., Полищук Ю.М. Изучение изменений термокарста в зоне прерывистого распространения вечной мерзлоты Западной Сибири на основе космических снимков // Исслед. Земли из космоса, 2009, № 4, с. 1–9.

Капралова В.Н. Закономерности развития термокарстовых процессов в пределах озерно-термокарстовых равнин (на основе подходов математической морфологии ландшафта: Автореф. дис. ... канд. геол.-мин. наук. М., 2014, 24 с.

Капралова В.Н., Викторов А.С. Моделирование морфологической структуры озерно-термокарстовых равнин и его геоэкологическое значение // Моделирование при решении геоэкологических задач. Сергеевские чтения. М., ГЕОС, 2009, вып. 11, с. 174–178.

Карлин С. Основы теории случайных процессов / С. Карлин. М., Мир, 1971, 536 с.

Кирпотин С.Н., Полищук Ю.М., Брыксина Н.А. Динамика площадей термокарстовых озер в сплошной и прерывистой криолитозонах Западной Сибири в условиях глобального потепления // Вестн. ТГУ, 2008, № 311, с. 185–189.

Королюк В.С. Справочник по теории вероятности и математической статистике / В.С. Королюк, Н.И. Портенко, А.В. Скороход и др. М., Наука, 1985, 640 с.

Кравцова В.И., Быстрова А.Г. Изменение размеров термокарстовых озер в различных районах России за последние 30 лет // Криосфера Земли, 2009, т. XIII, № 2, с. 16–26.

Крамер Г. Математические методы статистики / Г. Крамер. М., Мир, 1970, 648 с.

Ласточкин А.Н. Роль неотектоники в распределении и морфологии озер севера Западно-Сибирской равнины // Изв. АН СССР. Сер. геогр., 1969, № 5, с. 79–86.

Методическое руководство по инженерно-геологической съемке масштаба 1:200 000 (1:100 000–1:500 000). М., Недра, 1978, 391 с.

Перльштейн Г.З., Павлов А.В., Левашов А.В., Сергеев Д.О. Нетемпературные факторы теплообмена деятельного слоя с атмосферой // Материалы Третьей конф. геокриологов России (Москва, 1–3 июня 2005 г.). М., МГУ, 2005, с. 86–91.

Полищук В.Ю. Геоимитационное моделирование полей термокарстовых озер в зонах мерзлоты / В.Ю. Полищук, Ю.М. Полищук. Ханты-Мансийск, УИП ЮГУ, 2013, 129 с.

Burn C.R., Smith M.W. Development of thermokarst lakes during the Holocene at Sites Near Mayo, Yukon Territory // Permafrost and Periglacial Processes, 1990, vol. 1, p. 161–176.

Fitzgerald D., Riordan B.A. Permafrost and ponds. Remote sensing and GIS used to monitor Alaska wetlands at the landscape level // Agroborealis, 2003, vol. 35, No. 1, p. 30–35.

Makarycheva E., Sergeev D., Kapralova V., Jin H. Water level regime of thermokarst lakes in the mountain areas // Book of Abstracts of EUCOP4 – 4th European Conf. on Permafrost, Évora, Univ. of Lisbon and Univ. of Évora, 2014, p. 206.

Smith L.C., Sheng Y., Macdonald G.M., Hinzman L.D. Disappearing Arctic lakes // Science, 2005, vol. 308, No. 3, p. 14.

Поступила в редакцию
17 августа 2014 г.