

## ИНЖЕНЕРНАЯ КРИОЛОГИЯ

УДК 624.139  
DOI: 10.15372/KZ20250204  
EDN: TKTRGC

**РАСЧЕТ ПРОТАИВАНИЯ И ОБРАТНОГО ПРОМЕРЗАНИЯ  
МЕРЗЛЫХ ГРУНТОВ ВОКРУГ ЭКСПЛУАТАЦИОННЫХ СКВАЖИН****Я.Б. Горелик\*, И.В. Земеров***Институт криосферы Земли ТюмНЦ СО РАН, 625026, Тюмень, ул. Малыгина, 86, Россия**\*Автор для контакта; e-mail: gorelik@ikz.ru, zemerov.utmn@gmail.com*

Расчетом примеров при температуре мерзлых грунтов  $-3$  и  $-6$  °С как численным, так и аналитическим методами показано, что для аналитического описания процесса протаивания мерзлого грунта в период работы скважины может быть использована постановка задачи в форме Лейбенсона с заданием точного решения по температуре в неограниченной части пространства. Решение для радиуса протаивания такой задачи записывается в виде, близком к автомодельному. Получено точное аналитическое решение уравнения, описывающего изменение размеров талика при его обратном промерзании. Показано, что время обратного промерзания талика зависит не только от его размера, но и от истории его формирования. Установлено, что существует значение пограничной температуры грунта, ниже которого время замерзания талика меньше, чем время его образования. При температуре грунта выше пограничного значения соотношение между этими временами имеет обратный характер. На заключительных этапах проектирования конструкций крепи скважин рекомендовано ориентироваться на результаты численных расчетов параметров процессов протаивания и обратного промерзания, выполненных с помощью качественных программных продуктов. Точность аналитического метода не вполне соответствует требованиям точности прогноза при проектировании, однако он позволяет достаточно надежно отследить тенденции в эволюции параметров процессов, сохраняет порядок расчетных величин и обеспечивает высокую скорость их оценки. Это позволяет рекомендовать использование аналитического метода для оперативных оценок процессов протаивания и обратного промерзания на подготовительных этапах изысканий под строительство и при проектировании конструкций крепи скважин, при мониторинговых исследованиях, а также на этапах отладки стандартных вычислительных программ под конкретную задачу.

**Ключевые слова:** *многолетнемерзлые грунты, крепь скважины, протаивание, обратное промерзание, методы расчета.*

**Ссылка для цитирования:** Горелик Я.Б., Земеров И.В. Расчет протаивания и обратного промерзания мерзлых грунтов вокруг эксплуатационных скважин // Криосфера Земли, 2025, т. XXIX, № 2, с. 43–54. DOI: 10.15372/KZ20250204. EDN: TKTRGC.

**CALCULATIONS OF FROZEN SOIL THAWING AND REFREEZING PROCESSES  
NEAR DEVELOPMENT WELLS****J.B. Gorelik\*, I.V. Zemerov***Earth Cryosphere Institute, Tyumen Science Center Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,  
Malygina St. 86, Tyumen, 625026 Russia**\*Corresponding author; e-mail: gorelik@ikz.ru, zemerov.utmn@gmail.com*

Calculation for examples of frozen soils with temperatures of  $-3$  and  $-6$  °C using both numerical and analytical methods demonstrated that for an analytical description of the frozen soil thawing during the well operation period, the problem statement in the Leibenson form can be used with the assignment of an exact solution for the temperature in an unlimited part of space. The solution for the thawing radius in such a problem is written in a form close to self-similar. An exact analytical solution is obtained for the equation describing the change in the talik size upon its refreezing. It is shown that the time of refreezing of the talik depends not only on its size but also on the history of its formation. It is established that there is a boundary soil temperature value, below which the talik refreezing time is less than the time of its formation. At a soil temperature above the boundary value, the relationship between these times is inverse. At the final stages of well support design, it is recommended to rely on the results of numerical calculations of the parameters of thawing and refreezing processes using high-quality software products. The accuracy of the analytical method does not fully meet the requirements for the accuracy of the forecast during design, but it allows for fairly reliable tracking of trends in the evolution of process parameters, preserves the order of the calculated

values, and ensures a high speed of their assessment. This allows us to recommend the use of the analytical method for operational assessments of thawing and refreezing processes at the preparatory stages of surveys for construction and in the design of well support structures, in monitoring studies, as well as at the stages of debugging standard computing programs for a specific task.

**Keywords:** *permafrost, well's support, thawing, refreezing, calculation methods.*

## ВВЕДЕНИЕ

Размеры талой зоны, возникающей вокруг добывающих скважин в процессе их эксплуатации, тесно связаны с лимитами по допустимому времени их остановки в связи с силовым воздействием, вызванным обратным промерзанием оттаявших пород (при вынужденной или плановой остановке добычи) [Кутасов, 1976; Истомин и др., 1981а; Андреев и др., 1987; Дубина, Красовицкий, 1987; Медведский, 1987; Кузнецов и др., 2003], с ограничением минимального расстояния между скважинами на кустовой площадке [СП 25.13330-2012, 2012; Горелик и др., 2019], а также с характером и величиной силового воздействия на крепь при оттаивании грунтов (в период непрерывной добычи сырья) [Горелик, Солдатов, 2018]. Наиболее важным при проектировании конструкций скважин является определение максимальных нагрузок на крепь в течение всего срока эксплуатации и их сравнение с предельно допустимыми значениями. Этот расчет в итоге определяет наиболее эффективную конструкцию крепи, обеспечивает безаварийную работу скважины и базируется на прогнозе изменения радиуса ореола протаивания в зоне ее действия. Однако, несмотря на то, что сегодня имеется значительное количество качественных вычислительных программ, которые (в принципиальном отношении) способны обеспечить достаточно точный прогноз поведения радиуса протаивания во времени с учетом перерывов в работе теплового источника (скважины), по этой процедуре имеется ряд вопросов, которые должны обсуждаться заинтересованными специалистами.

Прежде всего необходимо отметить, что для цилиндрического источника тепла точные решения задачи Стефана получены только для двух ситуаций, которые далеко не исчерпывают все практически важные случаи [Карслоу, Егер, 1964]: а) линейный источник тепла (нулевого радиуса) постоянной мощности; б) постоянная температура стенки трубы при постоянной температуре грунта, равной температуре фазового перехода (см. также [Лыков, 1967]). Использование первого из этих решений в практических задачах затруднено сложностью определения переменного во времени потока тепла на стенке трубы (в отличие от температуры стенки), а второго – исключением возможности исследования влияния начальной температуры мерзлых грунтов на величину радиуса талика. Отсутствие точного решения задачи для практически важных случаев приводит к негатив-

ным последствиям. Так, для проектировщиков отсутствует возможность оперативной проверки результатов численного расчета с помощью упрощенных расчетных методик (которые, как правило, разрабатываются путем различных приближений точных решений). При этом их расчетные подразделения не способны ускорить процедуру отладки программы путем тестирования результатов расчета по точному решению. Для эксплуатационных служб добывающих предприятий затруднено оперативное сопоставление результатов мониторинговых наблюдений за размером талика с расчетными значениями. Кроме того, способ получения решений аналитическими методами (как точных, так и приближенных) играет важную роль в образовательном процессе, которая заключается в улучшении понимания происходящих процессов. Без такого понимания невозможна подготовка полноценных специалистов. Следует также иметь в виду, что достижение необходимой точности в численном методе требует, как правило, применения специального разбиения расчетной области сеткой с переменным размером ячейки, что существенно увеличивает не только длительность подготовки расчетной процедуры, но и продолжительность самой этой процедуры (для компьютера с типичными характеристиками время расчета одного варианта измеряется сутками, в то время как длительность оценочных расчетов измеряется минутами).

При этом в аналитических методах зависимость от влияющих факторов (в большинстве случаев) является непрерывной, а в численных методах она может быть получена только на дискретном множестве вариантов. Только часть указанных проблем может быть устранена при выполнении вычислений опытным и достаточно квалифицированным специалистом по численным методам, однако в настоящее время практически на всех соответствующих позициях заинтересованных предприятий ощущается их острый дефицит. Отсутствие же методов оперативного контроля результатов прогнозных расчетов повышает риски возникновения аварийных ситуаций. Замечания в отношении расчетных методов в значительной степени являются справедливыми для ряда иных сооружений (трубопроводы различного назначения, шахтные стволы, тоннели, нагнетательные скважины и другие заглубленные сооружения цилиндрической формы [Теория..., 1965; Порхаев,

1970; *Справочник...*, 1977; *Алексеев*, 2023], что в классической монографии [*Карслоу, Егер*, 1964] отмечено в качестве обоснования актуальности рассмотрения данной расчетной задачи.

Целью настоящей работы является восполнение указанных выше пробелов в методах расчета параметров ореолов протаивания вокруг скважин.

#### ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ ПО ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ

Анализ природы нагрузок на крепь, возникающих в процессе эксплуатации скважин, показывает, что при обратном промерзании наиболее важным фактором, определяющим максимум этих нагрузок, является температура мерзлых грунтов в непосредственной близости от стенки скважины [*Кузнецов и др.*, 2003], при этом возможные нагрузки на крепь пропорциональны понижению температуры относительно  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ , направлены по нормали к цилиндрической стенке (вызывая ее обжатие) и представляют серьезную опасность для целостности крепи. При монотонном протаивании грунтов основными факторами являются величина радиуса протаивания и вес оттаявших грунтов, действующий нормально горизонтальной поверхности, расположенной на произвольном удалении вглубь от поверхности грунтового массива [*Горелик, Солдатов*, 2018], роль температуры мерзлого грунта здесь лишь косвенно проявляется через зависимость от нее текущего радиуса протаивания. Вес оттаявшей массы увеличивается с глубиной и может передаваться на крепь через плотные глинистые слои, вызывая разрушающие осевые нагрузки. Процесс обратного промерзания всегда является опасным для приповерхностного интервала глубин (условно – до глубины нулевых годовых амплитуд) в силу низких (достигающих минимума) значений температур зимнего периода. Для осевых нагрузок этот интервал, напротив, не представляет серьезной опасности, такая опасность возникает начиная с глубин порядка 70 м и более. При этом если температура грунтов ниже глубины нулевых годовых амплитуд достаточно низкая (ориентировочно ниже  $-3\text{ }^{\circ}\text{C}$ ), то опасность процесса обратного промерзания будет сохраняться и для этих глубин. Для температур мерзлой толщи выше  $-3\text{ }^{\circ}\text{C}$  целостность крепи при обратном промерзании обеспечивается достаточной прочностью применяемых сегодня в нефтегазодобывающей промышленности труб [*Сароян*, 1976; *Саркисов и др.*, 1977; *Дубина, Красовицкий*, 1987; *Медведский*, 1987; *Кузнецов и др.*, 2003], в то время как осевые нагрузки по-прежнему могут достигать разрушающих значений.

Из вышесказанного следует, что достаточно полная постановка задачи по расчету динамики радиуса ореола протаивания в процессе эксплуатации скважины должна быть поставлена для по-

лупространства с вертикальной цилиндрической полостью (скважиной). На верхней границе полупространства должны быть заданы сезонные условия теплообмена грунта с атмосферой, а на стенке полости – условия теплообмена добываемого флюида с грунтом с учетом термического сопротивления крепи. В качестве начального условия можно выбрать постоянную по всему полупространству температуру на глубине нулевых амплитуд. Решение такой задачи не представляет принципиальной сложности для современных программных продуктов. Однако разработка и применение аналитических решений для нее будут весьма затруднительны (в этом случае радиус протаивания является функцией не только времени, но и вертикальной координаты [*Горелик, Дзик*, 1990, 1994]). Вместе с тем достижение обозначенных во введении целей не подразумевает применение аналитических методов в сложных ситуациях. Для этого достаточно рассмотреть наиболее простой аналог полной постановки задачи, допускающий получение аналитических решений, и сопоставить результаты ее решения с численными результатами. При условии приемлемого соответствия обоих решений можно говорить о выполнении тестирования программного продукта и о достаточном уровне компетенции в постановке задачи, корректности процедуры программирования и надежности полученных результатов расчета. Далее приводится простой вариант такой задачи, допускающий получение аналитического решения, которое может быть использовано при проектировании и эксплуатации скважин и иных инженерных сооружений, возводимых в районах распространения многолетнемерзлых грунтов. Рассматривается движение фазовой границы вокруг бесконечного цилиндра с заданной постоянной температурой стенки в неограниченном массиве мерзлого грунта с заданной постоянной начальной температурой. В этом случае радиус талика зависит только от времени и постоянен вдоль продольной оси цилиндра.

Эта задача в определенном смысле близка к описанной выше более общей постановке для части полупространства, расположенного ниже глубины нулевых годовых амплитуд (в пренебрежении геотермическим градиентом), и является актуальной как для процессов оттаивания, так и для обратного промерзания в этой части пространства. Отметим, что в такой постановке задача ранее рассматривалась рядом исследователей с помощью приближенных методов решения (см., например, [*Истомин и др.*, 1981б, 1982]), но несмотря на ценность созданных теоретических представлений и практическую значимость, точность полученных результатов не оценивалась, сопоставление с численными решениями не выполнялось. В определенной степени указанные недостатки нивелиро-

ваны использованием фактических данных, однако это не может устранить их полностью. Следует также сказать, что точное решение этой простой задачи в настоящее время также неизвестно [Карслоу, Езер, 1964]. Помимо сказанного можно также отметить появившиеся в последнее время публикации, учитывающие наличие гидратных отложений в интервале залегания мерзлых пород для ряда месторождений, что вносит определенные изменения в постановку и решение рассматриваемой задачи (см., например, [Chuvilin et al., 2022]). Заметим, что этот вопрос в настоящей работе не рассматривается.

### РЕШЕНИЕ ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДОМ

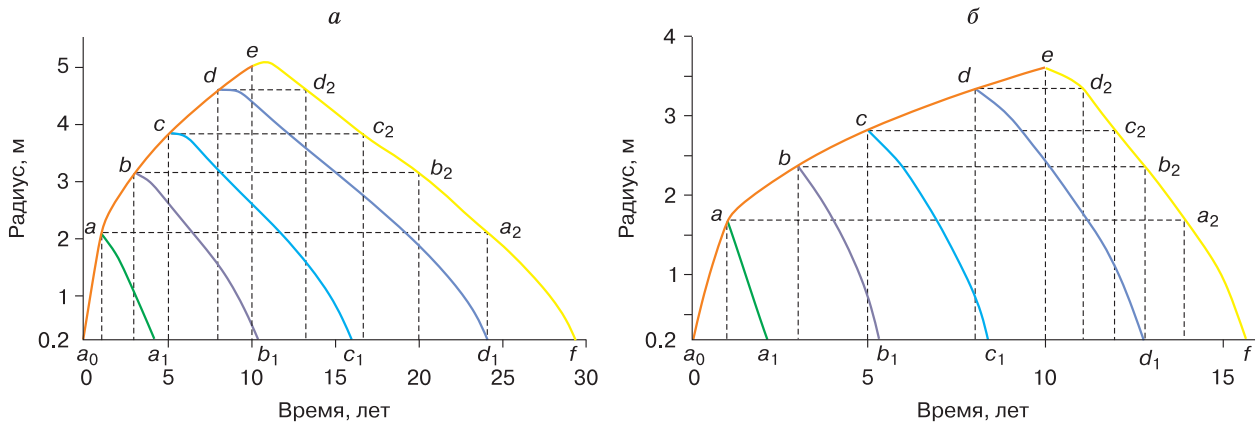
Для бесконечного цилиндра в неограниченном пространстве с заданными постоянными температурами на его стенке и в массиве грунта распределение температуры в грунте зависит только от радиальной координаты и времени и не зависит от продольной координаты вдоль оси цилиндра, а изотермы (включая изотерму фазовой границы) представляют собой окружности одинакового радиуса в плоскостях, нормальных его оси. Решение соответствующей задачи Стефана численным методом выполнено с помощью программы Q-Frost [Свидетельство..., 2016] с использованием осесимметричной опции. Выбор размеров расчетной области основан на выполнении требования о превышении этими размерами радиуса теплового влияния источника тепла (трубы) для всего расчетного срока [Горелик, Паздерин, 2017]. Примеры расчета выполнены для 10-летнего периода протаивания. Удовлетворяющая условиям задачи и требованию теплового влияния расчетная область имеет форму цилиндра высотой 0.5 м с внешним радиусом 50 м и с внутренней соосной цилиндрической полостью с радиусом, равным внешнему радиусу крепи скважины (в этом случае на внешних границах расчетной области выставляется нулевое значение теплового потока). Радиус полости принят 0.2 м (соответствует радиусу внешнего цементного кольца распространенных конструкций крепи скважин).

Исходные данные для расчета принимались в двух вариантах по температуре грунта при равных значениях остальных параметров. Начальная температура грунта  $t_0$  для первого и второго вариантов равна  $-3$  и  $-6$  °С соответственно; температура стенки полости  $t_s = +15$  °С; радиус полости  $R_s = 0.2$  м; коэффициент теплопроводности, объемная теплоемкость и температуропроводность талого грунта (индекс  $u$ ) соответственно:  $\lambda_u = 1.8$  Вт/(м·°С),  $c_u = 7.5 \cdot 10^6$  Дж/(м<sup>3</sup>·°С),  $a_u = 2.4 \cdot 10^{-7}$  м<sup>2</sup>/с; те же параметры для мерзлого грунта (индекс  $f$ ) приняты:  $\lambda_f = 2.0$  Вт/(м·°С),  $c_f = 6.0 \cdot 10^6$  Дж/(м<sup>3</sup>·°С),  $a_f = 3.33 \cdot 10^{-7}$  м<sup>2</sup>/с; объемный вес скелета грунта  $\gamma_s = 1800$  кг/м<sup>3</sup>; весовая

влажность грунта  $w = 0.2$  д.е.; объемная теплота фазового перехода  $\kappa_w = 1.2 \cdot 10^8$  Дж/м<sup>3</sup>. В расчетах пренебрегается содержанием незамерзшей воды при отрицательных температурах (песчаные грунты). В рассматриваемых примерах максимальный срок протаивания ( $\tau_s$ ) равен 10 годам. Температура фазового перехода в грунте ( $t_b$ ) принята равной 0 °С.

Остановка работы скважины означает прекращение конвективного потока по лифтовой трубе и минимизацию ее теплообмена с грунтом, что дает основание для этого периода в качестве граничного условия на внешней стенке трубы задать нулевой тепловой поток. В этом случае, спустя некоторый довольно короткий промежуток времени, начнется процесс обратного промерзания (уменьшение радиуса талика), темп которого определяется запасами холода в мерзлой зоне грунта (распределением температуры в ней, теплоемкостью и теплопроводностью грунта). Время расчета одного варианта (включающего полный цикл – максимальное протаивание грунта и его обратное промерзание до контакта с трубой) с использованием осесимметричной опции программы составляет несколько минут. Отметим, что на решение этой задачи в декартовой системе координат той же программой необходимо несколько часов и, кроме того, такое решение связано с довольно трудоемкой процедурой подбора оптимальной схемы дискретизации расчетной области. При этом результаты расчета в обоих вариантах совпадают с хорошей точностью. Дополнительная осесимметричная опция в программе Q-Frost является удобной еще и в том отношении, что может служить тестовым инструментом для иных задач, имеющих в частных случаях осесимметричную постановку. При этом точность вычисления осесимметричной опции должна быть подтверждена соответствующим сравнением с каким-либо точным решением. Простейшая проверка может быть осуществлена расчетом протаивания при температуре мерзлого грунта  $t_0 = 0$  °С и при уменьшенной примерно на три порядка реальной теплоемкости талого грунта. Последнее означает, что квазистационарное распределение температуры в талой зоне является практически точным, и расчет должен соответствовать известной для данного случая точной зависимости радиуса протаивания от времени. Характеристика такого сравнения дана в следующем разделе.

Результаты расчета численным методом для двух значений температуры грунтов приведены на рис. 1. Десятилетний период формирования талика на рис. 1 отображается восходящей ветвью (кривая  $a_0-a-b-c-d-e$ ), период обратного промерзания соответствует нисходящей ветви (кривая  $e-d_2-c_2-b_2-a_2-f$ ), при этом протяженность по времени этой части кривой заранее неизвестна



**Рис. 1. Изменение радиуса талика вокруг скважины во времени:**

$a - t_0 = -3^\circ\text{C}$ ;  $б - t_0 = -6^\circ\text{C}$ ; участок  $a_0 - a - b - c - d - e$  – при протаивании пород; участок  $e - d_2 - c_2 - b_2 - a_2 - f$  – при обратном промерзании; кривые  $aa_1, bb_1, cc_1, dd_1$  соответствуют обратному промерзанию при промежуточной остановке скважины в точках  $a, b, c, d$ ; горизонтальные штриховые линии соединяют талики одинакового радиуса на кривых протаивания и промерзания ( $aa_2, bb_2, \dots$  – оригиналы в паре с равноразмерным двойником); вертикальные штриховые линии определяют момент времени образования конкретного талика.

и должна быть вычислена. Гипотетически прерывание работы скважины может быть осуществлено в произвольный момент времени из интервала 0–10 лет, в эти моменты (для примера взяты точки:  $a - 1$  год,  $b - 3$  года,  $c - 5$  лет,  $d - 8$  лет) может быть вычислен радиус сформировавшегося к этому моменту талика, а также время его обратного промерзания (по линиям  $a a_1, b b_1$  и т. д.). Необходимо также отметить, что при обратном промерзании талика, сформировавшегося в течение основного (10-летнего) цикла, на ниспадающей ветви формируются равноразмерные двойники таликов, соответствующие таликам работающей скважины, остановленной в точках  $a, b, c, d$  (на рис. 1 двойники соединены горизонтальными штриховыми линиями (например,  $a a_2, b b_2$  и т. д.)). В связи с рассмотрением влияния истории формирования талика на параметры его роста и обратного промерзания интерес представляет сопоставление времени его роста (до точек  $a, b, c, d$ ) и времени его обратного промерзания (по линиям  $a a_1, b b_1$  и т. д.), а также сопоставление времени обратного промерзания для исходных таликов и равноразмерных двойников (по линиям  $a_2 f$  и  $b_2 f$ ). Такое сопоставление приводится в результатах расчета рассматриваемой задачи. Отметим, что и на коротких ветвях обратного промерзания ( $a a_1, b b_1$  и т. д.) также возможно образование равноразмерных двойников, которые, однако, далее не рассматриваются.

### ИЗУЧЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Постановка рассматриваемой задачи в аналитической форме в цилиндрической системе коор-

динат с центром на продольной оси трубы имеет следующий вид [Карслоу, Егер, 1964]:

$$\frac{\partial t_u(r, \tau)}{\partial \tau} = a_u \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial t_u(r, \tau)}{\partial r} \right), \quad R_s \leq r \leq \xi(\tau); \quad (1)$$

$$\frac{\partial t_f(r, \tau)}{\partial \tau} = a_f \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial t_f(r, \tau)}{\partial r} \right), \quad \xi(\tau) \leq r \leq \infty, \quad (2)$$

где  $t_u(r, \tau), t_f(r, \tau)$  – распределения температуры в талой и мерзлой зонах (функции радиальной координаты  $r$  и времени  $\tau$ ) соответственно;  $\xi(\tau)$  – зависящая от времени радиальная координата межфазной границы (граница раздела талой и мерзлой зон в грунте). На межфазной границе заданы два условия: равенство температур температуре фазового перехода

$$t_u(\xi, \tau) = t_f(\xi, \tau) = t_b$$

и баланс тепла с учетом фазового перехода на этой границе

$$-\lambda_u \frac{\partial t_u}{\partial r} \Big|_{r=\xi} + \lambda_f \frac{\partial t_f}{\partial r} \Big|_{r=\xi} = \kappa_w \frac{d\xi}{d\tau}. \quad (3)$$

Граничное условие на стенке трубы:  $t_u(R_s, \tau) = t_s$ . Начальные условия:  $t_f(r, 0) = t_0, \xi(0) = R_s$ .

В отличие от известного аналога рассматриваемой задачи для полупространства с ограничивающей горизонтальной поверхностью в отсутствие скважины (имеющего точное аналитическое решение в автомодельном виде [Карслоу, Егер, 1964; Тихонов, Самарский, 1972]), уравнения (1) и (2), хотя и имеют точные решения в соответствую-

ющих областях, не являются достаточно компактными для анализа. Так, решение по температуре в талой зоне получается в виде бесконечного ряда [Карслоу, Егер, 1964], использовать которое в аналитических оценках весьма сложно. Однако для неограниченной части пространства имеется решение в достаточно компактном виде, пригодном для анализа. Воспользуемся этим, чтобы получить приемлемую форму решения в постановке Лейбензона [Общее мерзлотоведение, 1978]. Такая постановка заменяет точное решение по температуре в прилегающем к трубе конечном по толщине слое талого грунта квазистационарным распределением (в модельном случае равенства нулю теплоемкости талого грунта рассматриваемая постановка является точной и может служить тестовым примером для некоторых задач). Оно получается из выражения для стационарного распределения температуры, удовлетворяет граничным условиям для области уравнения (1) и имеет следующий вид [Лыков, 1967]:

$$t_u(r, \tau) = t_s \frac{\ln(\xi(\tau)/r)}{\ln(\xi(\tau)/R_s)}. \quad (4)$$

Точное решение для области пространства уравнения (2) выражается сходящимся интегралом от функций Бесселя (ниже используются стандартные обозначения) [Карслоу, Егер, 1964]:

$$t_f(r, \tau) = -t_0 \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{a_f \tau}{\xi^2} z^2\right) \times \frac{J_0(zr/\xi)Y_0(z) - J_0(z)Y_0(zr/\xi)}{J_0(z)^2 + Y_0(z)^2} \frac{dz}{z}. \quad (5)$$

Для обеспечения граничных и начальных условий в области  $\xi(\tau) \leq r \leq \infty$  необходимо выполнение условия

$$\int_0^\infty \frac{J_0(zr/\xi)Y_0(z) - J_0(z)Y_0(zr/\xi)}{J_0(z)^2 + Y_0(z)^2} \frac{dz}{z} = -\frac{\pi}{2}, \quad r > \xi,$$

что может быть проверено как необходимостью выполнения граничных условий некоторых известных задач в осесимметричном случае [Карслоу, Егер, 1964], так и прямым вычислением с помощью стандартных программ MathCad. Для вычисления теплового потока от мерзлой зоны к межфазной границе в соотношении (3) необходимо взять производную по радиусу от температуры с помощью соотношения (5), при этом в числителе подынтегрального выражения образуется вронскиан пары функций Бесселя, значение которого равно  $(2/\pi)z$  [Бейтман, Эрдейи, 1974]. В итоге значение искомого теплового потока  $q_f$  принимает вид

$$q_f(\xi, \tau) = -\lambda_f \left. \frac{\partial t_f}{\partial r} \right|_{r=\xi} = -\lambda_f t_0 \frac{4}{\pi^2 \xi_0} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{a_f \tau}{\xi^2} z^2\right) \frac{1}{J_0(z)^2 + Y_0(z)^2} \frac{dz}{z},$$

а соотношение (3) с учетом (4) записывается как

$$\frac{\lambda_u t_s}{\ln(\xi_u/R_s)} + \frac{4\lambda_f t_0}{\pi^2} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{a_f \tau}{\xi_u^2} z^2\right) \times \frac{1}{J_0(z)^2 + Y_0(z)^2} \frac{dz}{z} = \frac{\kappa_w}{2} \frac{d\xi_u^2}{d\tau}, \quad (6)$$

где нижний индекс функции  $\xi_u(\tau)$  обозначает стадию протаивания (увеличения размера талой зоны); индекс функции  $\xi_f(\tau)$  – стадию обратного промерзания. Соотношение (6) является сложным интегродифференциальным уравнением относительно функции  $\xi_u(\tau)$  с начальным условием  $\xi_u(0) = R_s$ . Его решение полностью определяет как распределение температур в обеих зонах (соотношения (4) и (5)), так и закон движения межфазной границы во времени. Однако способ решения этого уравнения в общем случае требует применения специальных методов и на данный момент авторам неизвестен. Для получения приближенного решения воспользуемся тем соображением, что доминирующим фактором в процессах промерзания–протаивания является теплота фазового перехода, что приводит к сравнительно медленному изменению радиуса талика по отношению к изменению радиуса возмущения теплового поля в мерзлом массиве [Баренблатт, 1954; Истомина и др., 1982; Горелик и др., 2019]. Таким допущением аналог уравнения (6) для полупространства (в отсутствии скважины) приводится к достаточно простым расчетным формулам с сохранением автомодельной формы решения путем разложения функции ошибок в ряд с удержанием только первых его членов. Отсюда следует, что и в цилиндрическом случае решение может быть получено в близком к автомодельному виде. Более конкретно это допущение дает возможность записать решение уравнения (6) в следующей форме:

$$\xi_u(\tau) = R_s + \gamma_u(\tau)\sqrt{\tau}, \quad (7)$$

где  $\gamma_u(\tau)$  является медленно меняющейся функцией. Точный смысл медленного изменения этой функции выясняется после подстановки этого выражения для  $\xi_u(\tau)$  в производную правой части (6) (штрих обозначает производную по времени):

$$\frac{d\xi_u^2}{d\tau} = \gamma_u^2 + R_s \gamma_u / \sqrt{\tau} + 2\gamma_u' \sqrt{\tau} (R_s + \gamma_u \sqrt{\tau}). \quad (8)$$

Из (8) медленность изменения  $\gamma_u(\tau)$  определяется тем условием, что слагаемое, содержащее производную по времени, является пренебрежимо малым по сравнению с суммой первых двух слагаемых. Обозначая через  $\varphi_1(\tau)$  сумму первых двух слагаемых и через  $\varphi_2(\tau)$  модуль третьего слагаемого, высказанное требование записывается следующим образом:  $\psi_{12}(\tau) \equiv \varphi_2(\tau)/\varphi_1(\tau) \ll 1$  для любого момента времени из расчетного промежутка. Подставляя в обе части (6) соотношение (7) и отбрасывая член с производной  $\gamma'_u$  в правой части (6) получим трансцендентное алгебраическое уравнение относительно неизвестной функции  $\gamma_u(\tau)$ , которое достаточно просто решается с помощью стандартных вычислительных программ (например, в среде MathCad). После получения такого решения его корректность должна быть проверена на выполнимость записанного выше неравенства для функции  $\psi_{12}(\tau)$ .

Целесообразно здесь проиллюстрировать предлагаемый подход на простом примере протаивания мерзлого грунта при его начальной температуре, совпадающей с температурой фазового перехода ( $t_0 = t_b = 0^\circ\text{C}$ ), остальные характеристики задачи принимаются идентичными тем, что даны в численной постановке задачи. Для этого случая второй член в левой части (6) исчезает, а зависимость радиуса протаивания от времени, удовлетворяющая начальному условию  $\xi(0) = R_s$ , выражается неявно уравнением [Лыков, 1967]

$$\xi_{us}^2 \left( \ln \frac{\xi_{us}}{R_s} + 0.5 \left( \frac{R_s^2}{\xi_{us}^2} - 1 \right) \right) - \frac{2k\lambda_u t_s \tau}{\kappa_w} = 0, \quad (9)$$

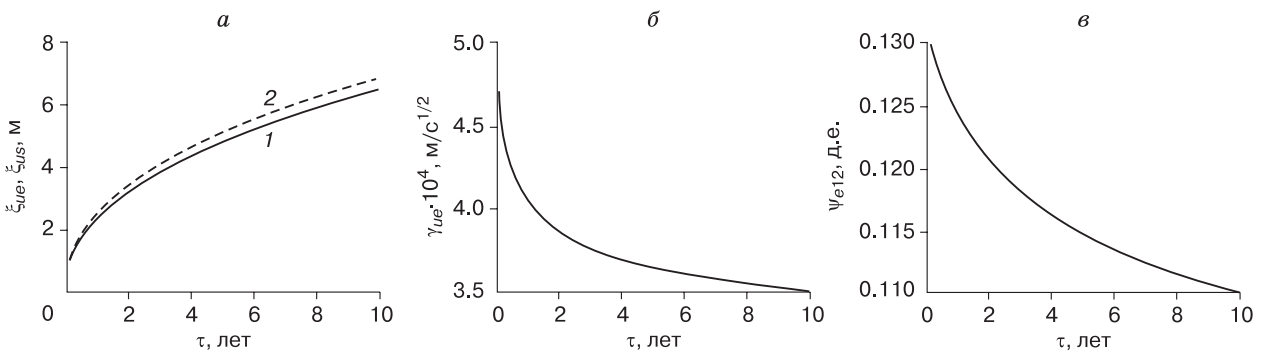
где  $k = 3.154 \cdot 10^7$  – количество секунд в году, а время  $\tau$  отсчитывается в годах; индекс  $s$  характеризует точное решение. Графическое выражение функции  $\xi_{us}(\tau)$ , полученное с помощью MathCad, приведено на рис. 2, а. Для этого примера уравнение (6) долж-

но быть записано относительно функции  $\gamma_{ue}(\tau)$  следующим образом (индекс  $e$  относится к приближенному решению):

$$\frac{2\lambda_u t_s}{\kappa_w} - \left( \gamma_{ue}^2 + \gamma_{ue} R_s / \sqrt{k\tau} \right) \ln \left( 1 + \gamma_{ue} \sqrt{k\tau} / R_s \right) = 0. \quad (10)$$

Решение (10) относительно  $\gamma_{ue}(\tau)$  приведено на рис. 2, б, соответствующее поведение радиуса талика  $\xi_{ue}(\tau)$  (определяемого по формуле (7)) для сравнения приведено на рис. 2, а. Ход функции  $\psi_{12}(\tau)$ , демонстрирующей обоснованность принятого допущения, показан на рис. 2, в. На рис. 2, в можно отметить вполне приемлемую точность для оценочных расчетов, а графики на рис. 2, а демонстрируют близость точного и приближенного решений во всем расчетном диапазоне времени (10 лет). Для сравнения приведем некоторые цифры, характеризующие абсолютные значения отклонения приближенных значений от точного: для 1 года протаивания  $\xi_{us}(1) = 2.61$  м,  $\xi_{ue}(1) = 2.48$  м, Q-Frost дает 2.62 м; для 10 лет протаивания  $\xi_{us}(10) = 6.83$  м,  $\xi_{ue}(10) = 6.48$  м, по Q-Frost – 6.84 м. По этим данным, а также по скорости вычислений можно утверждать, что ассиметричная опция программы Q-Frost может в ряде задач служить весьма эффективным инструментом для тестирования иных вычислительных программ и алгоритмов. Отметим, что для рассмотренного здесь примера вопрос об обратном промерзании не стоит.

Описанная выше процедура использована для решения уравнения (6) путем подстановки соотношения (7) в обе его части, исключения члена с  $\gamma'_u(\tau)$  в правой части и последующего решения полученного алгебраического уравнения относительно  $\gamma_u(\tau)$  средствами MathCad. Полученные таким путем решения уравнения (6) в стадии протаивания для температур грунта  $t_0 = -3$  и  $-6^\circ\text{C}$



**Рис. 2. Пример описания процесса протаивания пород вокруг скважины приближенным выражением (7) при  $t_0 = 0^\circ\text{C}$ .**

а – изменение радиуса протаивания во времени согласно точному решению (9) (сплошная линия 1 –  $\xi_{us}$ ) в сравнении с приближенным выражением (7) (линия 2 –  $\xi_{ue}$ ); б – зависимость коэффициента  $\gamma_{ue}$  от времени  $\tau$ ; в – график функции  $\psi_{e12}$  относительной погрешности приближенного метода.

представлены на рис. 3, а (эти графики соответствуют левой ветви графиков протаивания пород и росту размеров талика на рис. 1). Рисунки 3, б, в характеризуют точность полученного решения в соответствующих вариантах согласно введенному критерию по функции  $\psi_{12}(\tau)$ .

Прежде чем переходить к исследованию обратного промерзания в рассматриваемой системе, отметим, что, в отличие от процесса протаивания, который происходит под действием внешнего источника тепла – температуры стенки скважины, обратное промерзание вызывается внутренними запасами холода в мерзлой части грунта и потому тесно связано с перераспределением его температуры как в период роста талика, так и при уменьшении его размеров (при исчезновении источника тепла). Отметим также, что после отключения источника тепла некоторое (относительно короткое) время происходит дальнейший рост талика за счет теплоемкости талой зоны. Этот процесс учитывается в численных расчетах, однако в силу малости его влияния на результаты в аналитических методах целесообразно пренебрегать этим, чтобы не усложнять расчетную процедуру.

Уравнение для динамики радиуса протаивания после обращения в нуль теплового потока на стенке скважины (предполагается, что в этот момент радиус протаивания достигает своего максимального значения  $\xi_u(\tau_s)$ , где  $\tau_s$  – момент отключения теплового источника на стенке скважины, отсчитываемый от начала ее работы) имеет вид,

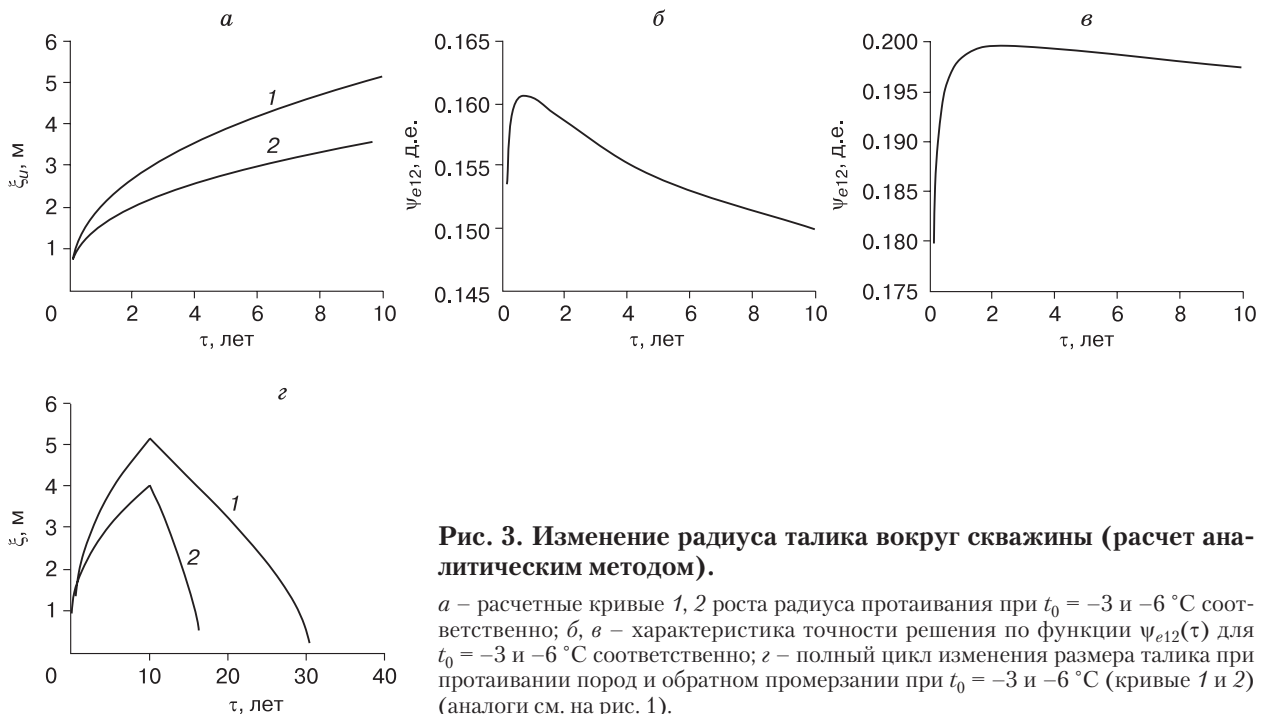
аналогичный уравнению (6), с учетом равенства нулю теплового потока из талой зоны:

$$\frac{4\lambda_f t_0}{\pi^2} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{a_f(\tau_s + \tau)}{\xi_f(\tau)^2} z^2\right) \times \times \frac{1}{J_0(z)^2 + Y_0(z)^2} \frac{dz}{z} = \frac{\kappa_w}{2} \frac{d\xi_f^2}{d\tau} \quad (11)$$

с начальным условием  $\xi_f(0) = \xi_u(\tau_s)$ . В данном соотношении обозначение функции  $\xi_u(\tau)$  уравнения (6) изменено на  $\xi_f(\tau)$ , что соответствует резкому изменению поведения радиуса талика и характеризует этап его монотонного уменьшения во времени (отсчитываемого от момента  $\tau_s$ ) вследствие развития процесса замерзания. Уравнение (11) имеет точное аналитическое решение. Способ его получения основан на замене искомой функции согласно преобразованию:  $z_f(\tau) = \xi_f(\tau)^2 / a_f(\tau_s + \tau)$ , где  $z_f(\tau)$  – новая искомая функция. Выполняя преобразование в (11) с помощью указанной замены, достаточно просто приходим к уравнению с разделяющимися переменными относительно  $z_f(\tau)$  (константа  $B_f = 8c_f t_0 / (\pi^2 \kappa_w)$ ):

$$B_f \varphi(z_f) - z_f = (\tau_s + \tau) \frac{dz_f}{d\tau}, \quad (12)$$

$$\varphi(z_f) = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{z_f}\right) \frac{dx}{x(J_0(x)^2 + Y_0(x)^2)}.$$



**Рис. 3. Изменение радиуса талика вокруг скважины (расчет аналитическим методом).**

а – расчетные кривые 1, 2 роста радиуса протаивания при  $t_0 = -3$  и  $-6$  °С соответственно; б, в – характеристика точности решения по функции  $\psi_{e12}(\tau)$  для  $t_0 = -3$  и  $-6$  °С соответственно; з – полный цикл изменения размера талика при протаивании пород и обратном промерзании при  $t_0 = -3$  и  $-6$  °С (кривые 1 и 2) (аналоги см. на рис. 1).

**Расчетные параметры динамики формирования и обратного промерзания таликов  
вокруг эксплуатационных скважин**

$\tau_s$ , лет	$\xi_u(\tau_s)$ , м	$\tau_{f1}$ , лет	$\tau_{fu}$ , лет	$\tau_{f2}$ , лет	$\Delta\tau_f$ , лет
$t_0 = -3\text{ }^\circ\text{C}$					
1	2.06/2.08	3.11/3.07	13.9/15.3	5.52/5.10	2.42/2.03
3	3.13/3.18	7.35/7.50	9.91/10.3	9.48/10.1	2.13/2.60
5	3.82/3.89	11.1/11.4	6.80/6.67	12.6/13.7	1.52/2.6
8	4.60/4.70	16.2/16.9	3.21/2.36	16.2/18.0	0.02/1.1
10	5.02/5.14	19.4/20.4	0/0	19.4/20.4	0/0
$t_0 = -6\text{ }^\circ\text{C}$					
1	1.64/1.75	1.07/1.06	4.06/4.71	1.77/1.72	0.70/0.66
3	2.38/2.59	2.38/2.48	2.93/3.18	2.90/3.25	0.52/0.77
5	2.83/3.12	3.48/3.71	2.08/2.07	3.75/4.36	0.27/0.65
8	3.34/3.71	4.93/5.39	0.88/0.75	4.60/5.68	0.02/0.29
10	3.61/4.03	5.83/6.43	0/0	5.83/6.43	0/0

Примечание.  $\tau_s$  – время работы скважины (от момента ее запуска);  $\xi_u(\tau_s)$  – радиус талика, сформированного за время  $\tau_s$ ;  $\tau_{f1}$  – время промерзания талика от момента остановки скважины (в точке  $\tau_s$ );  $\tau_{fu}$  – время формирования равно-размерного двойника (отрезки  $e-a_2$ ,  $e-b_2$  и т.д.) на ветви заморзания ( $e-d_2-c_2-b_2-a_2$ ) от момента остановки скважины в 10-летнем цикле ее работы (см. рис. 1, 2);  $\tau_{f2}$  – время промерзания двойника (соответствующего оригиналу, сформированному к моменту времени  $\tau_s$ );  $\Delta\tau_f$  – разница между временем заморзания двойника и оригинала. Числитель – данные численного метода, знаменатель – аналитического метода.

Решение этого уравнения (удовлетворяющее начальному условию для  $\xi_f(\tau)$ ) записывается в виде

$$\ln\left(1 + \frac{\tau}{\tau_s}\right) = \int_{z_{f0}}^{z_f} \frac{dx}{B_f \varphi(x) - x}, \tag{13}$$

$$z_{f0} = \frac{\xi_f(0)^2}{a_f \tau_s} = \frac{\xi_u(\tau_s)^2}{a_f \tau_s}.$$

Учитывая, что константа  $B_f$  отрицательна, а функция  $\varphi(z)$  положительна, знаменатель подынтегральной функции в (13) отрицателен. Значения же самого интеграла неотрицательны, поскольку верхний предел меньше нижнего. Значения функции времени в левой части (13) также неотрицательны. Первое из соотношений (13) в неявном виде определяет зависимость  $z_f(\tau)$ , далее, согласно соотношению по замене переменных, определяется искомая функция  $\xi_f(\tau)$  (начальное условие для этой функции удовлетворяется автоматически согласно пределам интеграла в (13)). Для нахождения функции  $z_f(\tau)$  с помощью средств MathCad решается алгебраическое уравнение (13).

Вычисление времени заморзания равновеликих двойников, соответствующих выделенным точкам на левой ветви, производится также на основе решения уравнения (13). Например, время заморзания талика, сформированного в точке  $a_2$  (равного по размеру талику в точке  $a$  на рис. 1) равно разности между временем полного заморзания талого ореола, сформированного в точке  $e$  и его же временем заморзания до размера, соответ-

ствующего точке  $a_2$  (равному таковому в точке  $a$ ). Оба этих временных интервала находятся из (13) путем приравнивания величины  $\xi_f(\tau)$  соответствующим размерам ( $\xi_u(\tau_s)$  или  $R_s$ ) и разрешением полученного условия относительно искомого интервала. Таким способом найдены все характеристики формирующихся таликов, а также их равновеликих двойников. Результаты этих вычислений, полученные как численным, так и аналитическим методами, сведены в таблицу. Полная эволюция размеров талика, ветвь заморзания которого найдена на основе аналитического решения (13), для обоих вариантов по температуре приведена на рис. 3, г. Следует обратить внимание, что, хотя решение (13) и является точным решением уравнения (11), оно зависит от начального условия, которое является приближенным решением задачи для цикла протаивания (согласно квазистационарному распределению температуры в талой зоне). Для нахождения точного решения задачи об изменении размеров талика в полном цикле его эволюции необходимо (и достаточно) найти точное решение в цикле протаивания, что в общем случае пока не получено в рамках постановки задачи по Лейбензону.

### СОПОСТАВЛЕНИЕ МЕТОДОВ И РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТОВ

Характер соответствия результатов расчета численным и аналитическим методами дают параметры эволюции таликов, приведенные в таблице (при этом за эталон принимаются результаты численного метода, расхождения в результатах трактуются как недостатки аналитического метода).

Прежде всего отметим, что качественное поведение характеристик эволюции талика в обоих методах идентично в обоих вариантах по температуре  $t_0$ . Монотонный рост с увеличением времени формирования талика ( $\tau_s$ ) обнаруживают зависимости радиуса протаивания  $\xi_u(\tau_s)$  и время полного его промерзания после остановки скважины  $\tau_{f1}(\tau_s)$ . При этом с помощью аналитических методов достаточно просто устанавливается, что существует такое значение температуры  $t_0^*$  (при прочих постоянных параметрах), ниже которой время замерзания талика меньше, чем время его образования. Соответственно, при температуре грунта выше данного (пограничного) значения соотношение между этими временами имеет обратный характер. Такая возможность увеличения или уменьшения времени промерзания относительно времени теплового воздействия и связь этого явления с температурой мерзлых пород ранее была отмечена в работе [Истомин и др., 1982]. Значение пограничной температуры зависит от всей совокупности исходных данных задачи и для рассматриваемых примеров приблизительно равно  $-4^\circ\text{C}$  (ср. данные таблицы по  $\tau_s$  и  $\tau_{f1}(\tau_s)$  для  $-3$  и  $-6^\circ\text{C}$ ). Отметим, что аналогичные утверждения могут быть сделаны относительно температуры стенки  $t_s$ , что не менее важно для приложений. Время формирования равновеликого двойника в зависимости  $\tau_{fu}(\tau_s)$  монотонно снижается (столбец 4). Время замерзания двойника  $\tau_{f2}(\tau_s)$  монотонно возрастает (столбец 5), а его величина для каждого момента времени  $\tau_s$  превышает время замерзания его оригинала  $\tau_{f1}(\tau_s)$  (столбец 3). Величина  $\Delta\tau_f(\tau_s)$  всегда положительна (столбец 6), что указывает на зависимость времени обратного промерзания не только от размеров талика, но и от истории его эволюции. Поведение величины  $\Delta\tau_f(\tau_s)$  в обоих методах обнаруживает немонотонный характер и имеет максимум в средней части изменения  $\tau_s$  (необходимо иметь в виду, что  $\Delta\tau_f(\tau_s) \rightarrow 0$  при  $\tau_s \rightarrow 0$ ). То обстоятельство, что замерзание двойника всегда более длительно, чем его исходного прототипа, отражает важную особенность процесса обратного промерзания: этот процесс происходит только за счет ресурсов холода в мерзлой части массива. Чем длительнее процесс формирования талика, тем более объемной оказывается прогреваемая таликом зона мерзлого грунта и тем более длительным будет процесс обратного промерзания. Отсюда следует, что время обратного промерзания талика зависит от истории его эволюции: нельзя однозначно решить задачу о времени обратного промерзания талика, не зная историю его формирования.

Количественно результаты расчетов аналитическим методом довольно хорошо соответствуют результатам численного метода в части формирования и замерзания первичного талика (восходя-

щая ветвь графиков на рис. 1). По другим параметрам точность соответствия несколько хуже, однако в среднем по всем столбцам таблицы относительная ошибка не превышает 0.3 для обоих значений температуры  $t_0$ . При этом соответствие результатов несколько ухудшается с понижением температуры пород. В целом можно сказать, что точность аналитического метода не вполне соответствует требованиям точности прогноза, однако он позволяет достаточно надежно отследить тенденции в изменении процессов, сохраняет порядок расчетных величин и обеспечивает высокую скорость их оценки.

## ВЫВОДЫ

1. Для аналитического описания процесса протаивания мерзлого грунта в период работы скважины может быть использована постановка задачи в форме Лейбензона с заданием точного решения по температуре в неограниченной части пространства. Решение для радиуса протаивания такой задачи записывается в виде, близком к автомодельному, где коэффициент при  $\sqrt{\tau}$  является медленно меняющейся функцией времени ( $\tau$ ). При этом медленность изменения коэффициента определяется сформулированным критерием точности получаемого решения.

2. Получено точное аналитическое решение уравнения, описывающего изменение размеров талика при его обратном промерзании, которое, однако, зависит от радиуса протаивания на момент остановки работы скважины. Поскольку для задачи о протаивании точное решение в постановке Лейбензона отсутствует, решение для обратного промерзания наследует имеющуюся погрешность в решении задачи о протаивании. Относительная погрешность предлагаемого аналитического метода по отношению к качественным результатам численного решения оценивается величиной, не превышающей 30 %.

3. Существует значение пограничной температуры грунта  $t_0^*$  (при прочих постоянных параметрах), ниже которой время замерзания талика меньше, чем время его образования. Соответственно, при температуре грунта выше пограничного значения соотношение между этими временами имеет обратный характер. Значение пограничной температуры зависит от всей совокупности исходных данных задачи и для рассматриваемых примеров приблизительно равно  $-4^\circ\text{C}$ .

4. Уменьшающийся радиус талика (нисходящая ветвь на рис. 1) в каждый момент времени повторяет его величину в некоторой точке кривой протаивания (восходящая ветвь на рис. 1), образуя равновеликий двойник растущего талика (оригинала). Единственной причиной обратного промерзания являются запасы холода и его распределение в мерзлой зоне, которые изменяются в

процессе эволюции талика. Следствием этого изменения является разница во времени замерзания двойника и оригинала. Время обратного промерзания двойника всегда больше времени замерзания равновеликого оригинала. Время обратного промерзания зависит не только от начального размера талика и температуры пород, но и от истории его эволюции.

5. На заключительных этапах проектирования конструкций крепи скважин следует ориентироваться на результаты численных расчетов параметров процессов протаивания и обратного промерзания, выполненных с помощью качественных программных продуктов.

6. Точность аналитического метода не вполне соответствует требованиям точности прогноза, однако он позволяет достаточно надежно отследить тенденции в изменении процессов, сохраняет порядок расчетных величин и обеспечивает высокую скорость их оценки. Использование таких методов помогает пониманию происходящих процессов на достаточно высоком уровне. Это позволяет рекомендовать использование аналитического метода для оперативных оценок процессов протаивания и обратного промерзания мерзлого грунта вокруг скважин на подготовительных этапах изысканий под строительство и при проектировании конструкций крепи, при мониторинговых исследованиях, а также на этапах отладки стандартных вычислительных программ под конкретную задачу. Для повышения точности предлагаемого метода необходимо увеличить точность расчета в активном цикле работы скважины.

**Благодарности.** Авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность: профессору, д.х.н. Истомину Владимиру Александровичу за помощь в возможности ознакомления с трудностями в настоящее время, но важными публикациями; к.т.н. Гунару Алексею Юрьевичу за весьма полезную и содержательную консультацию по потенциальным возможностям программы Q-Frost, а также за конструктивный характер замечаний; к.ф.-м.н. Бардасову Сергею Александровичу за продуктивные консультации по потенциальным возможностям системы MathCad.

Работа выполнена в Институте криосферы Земли ТюмНЦ СО РАН в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № FWRZ-2021-0007).

## Литература

**Алексеев А.Г.** Взаимодействие промерзающих пучинистых органоминеральных и засоленных грунтов с фундаментами: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук. Якутск, 2023, 45 с.

**Андреев О.Ф.** Методическое руководство по прогнозированию теплового и механического взаимодействия скважин

с мерзлыми грунтами / О.Ф. Андреев, В.В. Врачев, И.А. Истомин и др. М., Мингазпром, 1987, 96 с.

**Баренблатт Г.И.** О некоторых приближенных методах в теории одномерной неустановившейся фильтрации жидкости при упругом режиме // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук, 1954, № 9, с. 35–49.

**Бейтман Г.** Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтман, А. Эрдейи. М., Наука, 1974, т. 2, 296 с.

**Горелик Я.Б., Дзык М.И.** Тепловое взаимодействие куста добывающих скважин с вечномерзлыми грунтами // Изв. АН СССР. Сер. Энергетика и транспорт, 1990, № 3, с. 143–152.

**Горелик Я.Б., Дзык М.И.** Стационарные температурные поля вокруг скважины // Изв. РАН. Сер. Энергетика и транспорт, 1994, № 2, с. 147–154.

**Горелик Я.Б., Паздерин Д.С.** Корректность постановки и решения задач по прогнозу динамики температурных полей в основании сооружений на многолетнемерзлых грунтах // Криосфера Земли, 2017, т. XXI, № 3, с. 49–59.

**Горелик Я.Б., Романок С.Н., Хабитов А.Х.** Учет совместного теплового действия скважин в кусте при расчете параметров области протаивания мерзлых грунтов // Криосфера Земли, 2019, т. XXIII, № 2, с. 79–87.

**Горелик Я.Б., Солдатов П.В.** Метод расчета вертикальной нагрузки на крепь скважины при оттаивании вмещающих мерзлых пород // Криосфера Земли, 2018, т. XXII, № 2, с. 50–60.

**Дубина М.М.** Теплообмен и механика взаимодействия трубопроводов и скважин с грунтами / М.М. Дубина, Б.А. Красовицкий. Новосибирск, Наука, 1987, 136 с.

**Истомин В.А.** Руководство по расчету темпов протаивания и обратного промерзания пород при выборе конструкции скважин в криолитозоне / В.А. Истомин, Б.И. Дегтярев, Н.Р. Колушев. М., Мингазпром, 1981а, 87 с.

**Истомин В.А., Дегтярев Б.И., Колушев Н.Р.** Результаты расчетов времени обратного промерзания пород вокруг скважины в зависимости от времени первоначального теплового воздействия // Бурения и эксплуатация скважин в зоне мерзлоты. М., ВНИИГАЗ, 1981б, с. 23–32.

**Истомин В.А., Дегтярев Б.И., Колушев Н.Р., Истомин А.З.** Расчет прямого и обратного перемещения фронта фазовых переходов вокруг скважины, бурящейся в криолитозоне // Изв. вузов. Нефть и газ, 1982, № 8, с. 19–24.

**Карслоу Г.** Теплопроводность твердых тел / Г. Карслоу, Д. Егер. М., Наука, 1964, 487 с.

**Кузнецов В.Г.** Напряженно-деформированное состояние крепи скважин в криолитозоне / В.Г. Кузнецов, В.П. Овчинников, А.А. Фролов и др. М., Недра, 2003, 155 с.

**Кутасов И.М.** Термическая характеристика скважин в районах многолетнемерзлых пород. М., Недра, 1976, 120 с.

**Лыков А.В.** Теория теплопроводности. М., Высш. шк., 1967, 600 с.

**Медведский Р.И.** Строительство и эксплуатация скважин на нефть и газ в вечномерзлых породах. М., Недра, 1987, 230 с.

**Общее мерзлотоведение (Геокриология)** / Под ред. В.А. Кудрявцева. М., Изд-во Моск. ун-та, 1978, 464 с.

**Порхаев В.Г.** Тепловое взаимодействие зданий и сооружений с мерзлыми грунтами. М., Наука, 1970, 208 с.

**Саркисов Г.М.** Прочность крепления стенок нефтяных скважин / Г.М. Саркисов, А.Е. Сароян, А.Г. Бурмистров. М., Недра, 1977, 144 с.

**Сароян А.Е.** Трубы нефтяного сортамента. Справ. рук-во. М., Недра, 1976, 507 с.

**Свидетельство** о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2016614404 Рос. Федерация / Песочки Д.Г. (патентообладатель); зарегистрировано 22.04.2016.

**СП 25.13330-2012.** Основания и фундаменты на вечномёрзлых грунтах. М., Минрегионразвития, 2012, 140 с.

**Справочник** по строительству на вечномёрзлых грунтах. Л., Стройиздат, 1977, 400 с.

**Теория** и практика мерзлотоведения в строительстве / Под ред. Л.А. Братцева, В.Ф. Жукова. М., Наука, 1965, 188 с.

**Тихонов А.Н.** Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. М., Наука, 1972, 736 с.

**Chuvilin E., Tipenko G., Bukhanov B. et al.** Simulating thermal interaction of gas production wells with relict gas hydrate-bearing permafrost // *Geosciences*, 2022, No. 12, p. 115.

## References

Alekseev A.G. Vzaimodeystviye promerzavshich puchinykh organomineralnich i zasolennich gruntov s fundamentami [Interaction of frost heave freezing ground with foundations: Thesis of Doctor Technical Science dissertation. Yakutsk, 2023, 45 p. (in Russian).

Andreev O.F., Vrachev V.V., Istomin V.A. et al. Metodicheskoe rukovodstvo po prognozirovaniyu teplovogo i mechanicheskogo vzaimodeistviya skvazhin s merzlymi gruntami [Methodological guidelines for predicting thermal and mechanical interaction of wells with frozen grounds]. Moscow, VNIIGAS, 198, 96 p. (in Russian).

Barenblutt G.I. About some approximation methods in theory of one-dimensional unsteady liquid filtration at elastic regime. *Izvestiya AN SSSR. Otd. Tekhn. Nauk* [Bulletin AS USSR, Series: Technical sciences], 1954, No. 9, p. 35–49.

Bateman H., Erdelyi A. *Visshye transcendetnye funktsii* [Higher transcendental functions]. N.Y., Toronto, London, Graw-Hill Book Company, 1953, 296 p.

Gorelik J.B., Dzik M.I. Heat interaction of the wells group with permafrost. *Bulletin AS USSR, Series: Power Industry and Transport*, 1990, No. 3, p. 143–152.

Gorelik J.B., Dzik M.I. Stationary temperature fields around wells. *Bulletin RAS. Series: Power Industry and Transport*, 1994, No. 2, p. 147–154.

Gorelik J.B., Pazderin D.S. Correctness of formulation and solution of thermotechnical problems in forecasting temperature field dynamics in the ground base of structures on permafrost. *Earth's Cryosphere*, 2017, vol. XXI, No. 3, p. 45–54.

Gorelik J.B., Romanyuk S.N., Khabitov A.K. Constraining thaw boundary around multiple wells with regard to their joint thermal effect // *Earth's Cryosphere*, 2019, vol. XXIII, No. 2, p. 67–73.

Gorelik J.B., Soldatov P.V. Method of calculation of axial load on the wellbore casing during thawing of frozen host sediments. *Earth's Cryosphere*, 2018, vol. XXII, No. 2, p. 44–53.

Dubina M.M., Krasovitsky B.A. Teploobmen i mekhanika vzaimodeistviya truboprovodov i skvazhin s gruntami [Heat exchange and mechanics of pipelines and wells interaction with ground]. Novosibirsk, Nauka, 1987, 136 p. (in Russian).

Istomin V.A., Degterev B.V., Kolushev N.P. Rukovodstvo po raschetu tempov protaivaniya i obratnogo promerzaniya porod pri vybere konstruktssii skvazhin v kriolitozone [Guidelines for

calculation of thawing and refreezing rates of soils during choosing a well construction in permafrost]. Moscow, VNIIGAS, 1981a, 67 p. (in Russian).

Istomin V.A., Degterev B.V., Kolushev N.P. Calculation results of rocks refreezing time around the well in depending on of the initial thermal impact time. In: *Bureniye i ekspluatatsiya skvazhin v zone merzloty* [Drilling and operation of wells in permafrost zones]. Moscow, VNIIGAZ, 1981b, p. 23–32 (in Russian).

Istomin V.A., Degterev B.V., Kolushev N.P., Istomin A.Z. Calculation of the forward and reverse movement of the phase transition front around a well drilled in the cryolithozone. *Izvestiya vuzov. Neft i gaz* [News of universities. Series: Oil and gas], 1982, No. 8, p. 19–24.

Carslaw H.S., Jaeger J.C. *Conduction of heat in solids*. N.Y., Clarendon Press, 1959, 510 p.

Kuznetsov V.G., Ovchinnikov V.P., Frolov A.A. et al. Napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie skvazhin v kriolitozone [Stress-deformation state of well's fastener at kriolitozone]. Moscow, Nedra, 2003, 155 p. (in Russian).

Kutasov I.M. Termicheskaya kharakteristika skvazhin v rayonakh mnogoletnemerzlich porod [Thermal characteristics of wells in permafrost regions]. Moscow, Nedra, 1976, 120 p. (in Russian).

Lykov A.V. *Teoriya teploprovodnosti* [Theory of heat transfer]. Moscow, Visschaya shkola, 1967, 600 p. (in Russian).

Medvedsky R.I. *Stroitelstvo i ekspluatatsiy skvazhin na neft i gaz v vechnomerzlykh porodakh* [Construction and operation of oil and gas wells in permafrost]. Moscow, Nedra, 1987, 230 p. (in Russian).

Obsheche merzlotovedenie [Geocryology]. V.A. Kudryvtsev (ed.). Moscow, MGU, 1978, 464 p. (in Russian).

Porchaev V.G. *Teplovoe vzaimodeistvie zdaniy i sooruzheniy s vechnomerzlymi gruntami* [Thermal interaction of buildings with permafrost]. Moscow, Nauka, 1970, 208 p. (in Russian).

Sarkisov G.M., Saroyan A.E., Burmistrov A.G. Prochnost' krepneniya stenok neftnykh skvazhin [Strength of wall's fastening of oil wells]. Moscow, Nedra, 1977, 144 p. (in Russian).

Saroyan A.E. *Truby neftyanogo sortaamenta* [Pipes of oil assortment. Hand book]. Moscow, Nedra, 1976, 507 p. (in Russian).

Svidetelstvo o gosudarstvennoy registratsiy programmy dly EVM 2016614404 RF [Patent for calculation program № 2016614404 RF] / Pesotsky D.G. (patent holder); registration 22.04.2016 (in Russian).

Working Document SP 25.13330.2012. Construction regulations. Basements and Foundationson Permafrost. Moscow, Minregionrazvitiya, 140 p. (in Russian).

Spravochnik po stroitelstvu na vechmerzlykh gruntakh [Handbook to the building on permafrost]. Leningrad, Stroyizdat, 1977, 400 p. (in Russian).

Teoriya i praktika merzlotovedeniya v stroitelstve [Theory and practice of permafrost science in vnonstruction]. L.A. Bratsev, V.F. Zhukov (eds.). Moscow, Nauka, 1965, 188 p. (in Russian).

Tychonov A.N., Samarsky A.A. *Uravenniya matematicheskoi fiziki* [Methods of mathematical physics]. Moscow, Nauka, 1972, 736 p. (in Russian).

Chuvilin E., Tipenko G., Bukhanov B. et al. Simulating thermal interaction of gas production wells with relict gas hydrate-bearing permafrost. *Geosciences*, 2022, No. 12, p. 115. – <https://doi.org/10.3390/geosciences12030115>

*Поступила в редакцию 29 мая 2024 г.,  
после доработки – 8 ноября 2024 г.,  
принята к публикации 11 февраля 2025 г.*